

The background is a complex collage of electronic components and logos. It features various integrated circuits, capacitors, and other parts, some with brand names like 'MAXIM', 'TAIYO YUDEN', 'AVAYA', 'SHARP', 'TEXAS INSTRUMENTS', and 'TI' visible. The colors are primarily blue, orange, and grey, with a semi-transparent white box containing the authors' names.

**Rifat Ramović
Slobodan Petričević
Peđa Mihailović**

**Zbirka zadataka iz elemenata
elektronskih uređaja**

**Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet
BEOGRAD, 2012**

Rifat Ramović, Slobodan Petričević, Peđa Mihailović

Zbirka zadataka iz elemenata elektronskih uređaja

Recenzenti

dr Jovan Radunović
dr Vitomir Milanović

Odlukom Naučno-nastavnog veća Elektrotehničkog fakulteta broj 2123/2 od 06.11.2012. godine ova knjiga je odobrena kao nastavni materijal na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu

Izdavač
Elektrotehnički fakultet

ISBN 978-86-7225-051-0

Predgovor

Problematika konstruisanja i primene komponenata elektronskih uređaja predstavlja značajnu granu elektrotehnike čiji kontinuirani razvoj karakteriše stalni tehnološki napredak u procesu proizvodnje komponenata i nove topologije elektronskih kola. Uticaj svojstava komponenata na ukupne performanse elektronskog kola kao i zahtevi koje kolo nameću u pogledu svojstava komponenata međusobno se prepliću. Studije na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu pokrivaju ovu problematiku kroz predmet Elementi elektronskih uređaja, čijim studentima je ova zbirka namenjena. Materijal iz zbirke biće koristan svima koji se bave ovom problematikom u praksi.

Zbirka prati gradivo predmeta Elementi elektronskih uređaja i u potpunosti je usaglašena sa nastavnim programom.

Autori se zahvaljuju dipl. ing. Iliji Adžiću na tehničkoj podršci u izradi zbirke.

U Beogradu 2012.g.

Slobodan Petričević
Peđa Mihailović

Predgovor Prof. Ramovića

U želji da se prikažu neki konstrukcioni problemi u oblasti elemenata elektronskih uređaja i ukaže na put njihovog rešavanja, oformljena je ova zbirka, koja predstavlja samo deo materijala koji je korišćen dugo godina na vežbama iz predmeta Elementi elektronskih uređaja na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu.

Na ovim problemima su, pored sastavljača, i izvodeći vežbe iz navedenog predmeta, radili i Dr S.Širbegović, Dr A.Mutavdžić, Dr Z.Popović, Mr Ž.Spasojević, Dr V.Milanović i Mr Z.Ikonić.

Smatramo da se ovaj materijal, dok se čeka kompletniji i potpuniji, korisno poslužiti u savladavanju gradiva iz oblasti Elemenata elektronskih uređaja.

Ovaj materijal, koji obuhvata oblast kalemova sa jezgrom i bez jezgra, mrežne, impulsne i niskofrekventne transformatore, otpornike, kondenzatore i postupke dobijanja poluprovodničkih p-n spojeva, pokriva samo deo programa iz predmeta Elementi elektronskih uređaja. On će uskoro biti dopunjen ostalim sadržajima iz ove problematike.

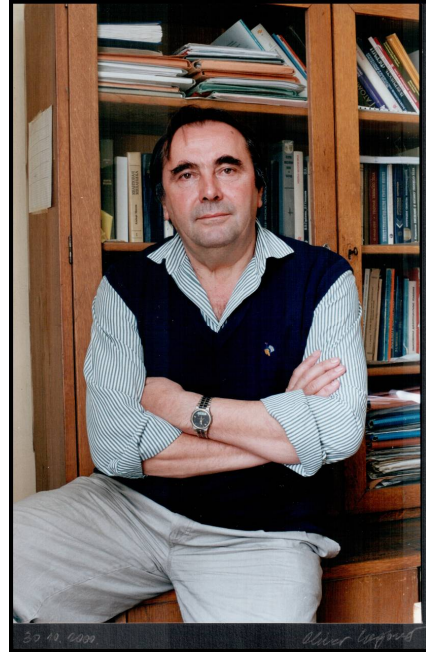
Tehničko sređivanje ovog materijala. pomogla je VTVA-a iz Žarkova, na čemu posebno zahvaljujemo.

U Beogradu

R. Ramović

IN MEMORIAM

Profesor Rifat Ramović rođen je 1. januara 1948 godine u Zastupu, a detinjstvo i mladost je proveo u Brodarevu. Diplomirao je 1972., magistrirao 1978., a doktorirao 1982. godine, sve na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu. Prvo se zaposlio 1972. godine u Institutu "Mihajlo Pupin". Od 1974. zaposlen je na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu, gde je prošao sva zvanja od asistenta pripravnika do redovnog profesora, u koje zvanje je izabran 2001. godine. Naučno nastavna delatnost profesora Ramovića odvijala se na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu, na Katedri za mikroelektroniku i tehničku fiziku. Odmah po dolasku na fakultet profesor Ramović se uključio u nastavni proces izводеći vrlo uspešno auditorne i laboratorijske vežbe iz više predmeta. Od tada profesor Ramović postaje omiljena ličnost među studentima i kolegama, zbog svojih izrazitih naučnih, stručnih, podjednako i ljudskih kvaliteta. Naporedo sa uspešnom pedagoškom karijerom, profesor Ramović sredinom sedamdesetih godina prošlog veka počinje i naučnu karijeru.



Prvi naučni rezultati vezani su za vrlo zanimljive i aktuelne problematike analize temperaturske zavisnosti probojnog napona u p-n spojevima i dvodimenzionalne analize transportnih procesa u MOS strukturama. Rezultati ovih istraživanja publikovani su u renomiranom međunarodnim časopisima i prezentovanim na mnogim konferencijama, gde su praćeni sa velikom pažnjom. Posle odbrane doktorske disertacije 1982. godine naučna delatnost profesora Ramovića odvija se u dva pravca: mikroelektronika i pouzdanost. Obe ove oblasti profesor Ramović uveo na ETF u Beogradu i ostao do danas neosporno najznačajniji istraživač. U oblasti mikroelektronike profesor Ramović je, vođen nepogešivom intuicijom, uvideo značaj analitičkih modela u analizi mikroelektronskih naprava. Vođen, samo njemu svojstvenom nesebičnošću, okupio je veliki broj mladih saradnika koji su iz ove oblasti diplomirali, magistrirali i doktorirali u proteklih dvadeset i više godina. Mnogi od njih su sada u najvišim zvanjima na fakultetima i institutima u zemlji i inostranstvu. Broj objavljenih radova u časopisima i zbornicima sa konferencija profesora Ramovića iz oblasti modelovanja poluprovodničkih naprava veći je od 100. Svi ovi radovi su višestruko citirani u domaćoj i stranoj literaturi. Ništa manje nije značajna ni aktivnost profesora Ramovića u oblasti pouzdanosti, oblast koju je profesor Ramović utemeljio u našoj zemlji. Posebno su značajni radovi profesora Ramovića koji se odnose na analizu pouzdanosti i raspoloživosti telekomunikacionih sistema u okviru kojih je okupio veliki broj saradnika.

Već na samom početku svoje karijere profesor Ramović privlači veliki broj studenata koji rade diplomske radove kod njega, lista kojih je na žalost zaključena sa brojem 316. Posle odbrane doktorske disertacije, kao što je već rečeno, profesor Ramović je okupio čitav tim mladih saradnika koji su pod njegovim kreativnim rukovodstvom uradili desetine magistarskih teza i doktorskih disertacija. To su ozbiljne naučne studije iz kojih se vidi, pored doprinosa autora, naučna imaginacija i vođenje teze sigurnom rukom profesora Ramovića.

Kao nastavnik profesor Ramović spadao je u najkvalitetnije i najomiljenije profesore našeg Fakulteta, u prvom redu zbog ozbiljnih predavanja i ljudskog odnosa prema studentima (ocene na studentskim anketama su uvek bile čiste petice ili nešto malo ispod nje). Ovo je sve rezultovalo i objavljivanjem desetak vrlo značajnih i zapaženih udžbenika, koji su svi danas u upotrebi, u širokoj lepezi tema od elemenata elektronskih uređaja, preko mikroelektronike i pouzdanosti. Nikako se ne može zaobići i naučna monografija posvećena modelovanju unipolarnih tranzistora malih dimenzija, sada već bazična literatura za izradu magistarskih i doktorskih radova iz ove oblasti.

Kolege su profesora Ramovića birale na mnoge značajne funkcije kao što su član Saveta fakulteta u više saziva, zamenik šefa Odseka za elektroniku i telekomunikacije i Odseka za tehničku fiziku, predsednik i član mnogih fakultetskih i van fakultetskih komisija. Kao šef Katedre za mikroelektroniku i tehničku fiziku katedru je uspešno vodio u vremenu vrlo delikatnih dilema i teških odluka.

Prof. Ramović preminuo je 10. decembra 2007.g.

SADRŽAJ

1	Kalemovi	1
2	Mrežni transformatori.....	38
3	Niskofrekventni transformatori.....	55
4	Impulsni transformatori	65
5	Otpornici.....	68
6	Kondenzatori.....	94
7	Elektronska kola.....	113
8	Pouzdanost.....	149
9	Dodaci	169

1 Kalemovi

Iako se konstrukcija savremenih elektronskih sklopova više oslanja na otpornike i kondenzatore, kalemovi još uvek zauzimaju značajno mesto, pre svega u impulsnim elektronskim kolima kao što su npr. prekidačka napajanja. Zbog prirode konstrukcije opšte prisutni trend minijaturizacije komponenata se odvija sporije kada su u pitanju kalemovi što je osnovni razlog njihove slabije zastupljenosti.

Egzaktno modeliranje karakteristika kalemova je komplikovan numerički problem koji se može uspešno zaobići primenom empirijskih formula iz ovog poglavlja.

Zadatak 1.1

a) Izvesti izraz za induktivnost kalema L preko geometrijski svedenih parametara Γ_1 i Γ_2 ako jezgro kalema ima zazor (procep) l_0 .

b) Pokazati da se izraz za L može napisati u obliku

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S_1}{\delta'} \quad (1.1.1)$$

Za slučaj jezgra od dinamo limova U-I profila, gde je svedeno međugvožđe δ' dato izrazom

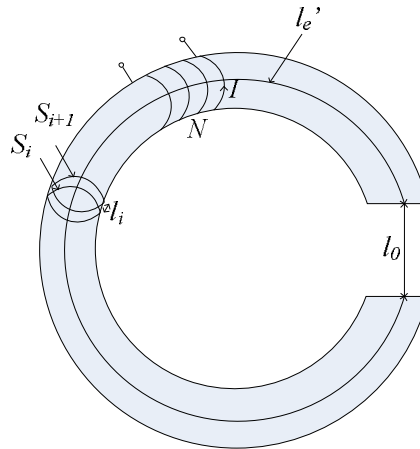
$$\delta' = 2p' = 2 \left(\frac{1}{f_e} \cdot \frac{l_1}{\mu_1} + \frac{1}{f_e} \cdot \frac{l_2}{\mu_2} \cdot \frac{S_1}{S_2} + p \right) \quad (1.1.2)$$

Faktor ispune jezgra gvoždem iznosi

$$f_e = \left(p = \frac{l_0}{2} \right) \quad (1.1.3)$$

REŠENJE:

a) Za magnetno kolo na slici važe relacije:



$$L = N \frac{\Phi}{I} \quad (1.1.4)$$

$$NI = R_m \cdot \Phi \quad (1.1.5)$$

$$R_m = \sum_{i=0}^n R_i \quad (1.1.6)$$

$$R_i = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_i} \cdot \frac{l_i}{S_i} \quad (1.1.7)$$

Gde su N - broj navojaka; I - struja; Φ - fluks; R_m - magnetska otpornost, μ - permeabilnost.

Iz (1.1.4), (1.1.5), (1.1.6), (1.1.7) sledi

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2 \cdot \mu_0}{\frac{l_0}{S_0} + \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\mu_i S_i}} = \frac{N^2 \cdot \mu_0}{\frac{l_0}{S_0} + \frac{l_e - l_0}{\mu \cdot S_e'}} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_e \cdot S_e \cdot N^2}{l_e} \quad (1.1.8)$$

Kako je

$$\Gamma_1 = \frac{l_e}{S_e}, \Gamma_2 = \frac{l_e}{S_e} \Rightarrow S_e = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}, l_e = l_e' - l_0 = \frac{\Gamma_1^2}{\Gamma_2} \quad (1.1.9)$$

Sledi

$$L = \frac{\mu_0 \cdot \mu_e \cdot N^2}{S_e \cdot \Gamma_2} \quad (1.1.10)$$

pri čemu je

$$V_e = \frac{\Gamma_1^3}{\Gamma_2^2} = l_e \cdot S_e \neq V \equiv \sum_{i=1}^n l_i \cdot S_i \quad (1.1.11)$$

gde je V_e - svedena zapremina.

b) Polazeći od izraza za induktivnost kalema u obliku

$$L = N \cdot \frac{\Phi}{I} = N \cdot \frac{B_1 \cdot S_1}{I} = N \cdot \frac{B_2 \cdot S_2}{I} = N \cdot \frac{B_0 \cdot S_1}{I} \quad (1.1.12)$$

i koristeći Amperov zakon o cirkulaciji vektora H

$$\oint H dl = 2H_1 \cdot l_1 + 2H_2 \cdot l_2 + 2H_0 \cdot p = N \cdot I \quad (1.1.13)$$

i zakona o konzervaciji fluksa

$$\Phi = B \cdot S = B_1 \cdot S_1 \cdot f_e = B_2 \cdot S_2 \cdot f_e = B_0 \cdot S_1 \quad (1.1.14)$$

gde je $B = \mu_0 \cdot \mu_1 \cdot H$, odnosno

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0 \cdot \mu_1}, H_2 = \frac{B_2}{\mu_0 \cdot \mu_2} = \frac{B_0}{f_e \cdot \mu_0 \cdot \mu_2} \cdot \frac{S_1}{S_2}, H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} \quad (1.1.15)$$

dobija se

$$NI = 2 \frac{B_0}{\mu_0} \left(\frac{1}{f_e} \cdot \frac{l_1}{\mu_1} + \frac{1}{f_e} \cdot \frac{l_2}{\mu_2} \cdot \frac{S_1}{S_2} + p \right) \quad (1.1.16)$$

odnosno,

$$NI = 2 \frac{B_0}{\mu_0} \cdot p' \quad (1.1.17)$$

gde je

$$p' = \frac{1}{f_e} \cdot \frac{l_1}{\mu_1} + \frac{1}{f_e} \cdot \frac{l_2}{\mu_2} \cdot \frac{S_1}{S_2} + p \quad (1.1.18)$$

Pri čemu je $S_1 = S_0$.

Iz (1.1.17) dobija se

$$I = \frac{2B_0 \cdot p'}{\mu_0 \cdot N} \quad (1.1.19)$$

Smenom (1.1.11) u (1.1.10) dobija se

$$L = \mu_0 \frac{N^2 \cdot S_1'}{\delta'} \quad (1.1.20)$$

Do relacije (1.1.20) može se doći i polazeći od izraza (1.1.8) u obliku

$$L = \frac{\mu_0 \cdot N^2}{\frac{l_0}{S_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\mu_i \cdot S_i}} \quad (1.1.21)$$

koji za ovu situaciju daje

$$L = \frac{\mu_0 \cdot N^2}{\frac{2p}{S_0} + \frac{2l_1}{\mu_1 \cdot S_1 \cdot f_e} + \frac{2l_2}{\mu_2 \cdot S_2 \cdot f_e}} = \frac{\mu_0 \cdot N^2}{\frac{1}{S_1} \cdot \left(2p \cdot \frac{S_1}{S_0} + \frac{2l_1}{\mu_1 \cdot f_e} \cdot \frac{S_1}{S_1} + \frac{2l_2}{\mu_2 \cdot f_e} \cdot \frac{S_1}{S_2} \right)} = \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot S_1}{\delta'} \quad (1.1.22)$$

Zadatak 1.2

Izvesti izraz za induktivnost prigušnice bez predmagnećenja sa procepom (p), ako se koriste M limovi standardnih dimenzija.

REŠENJE:

Imajući u vidu da se radi o limu standardnih dimenzija, što znači da je $\frac{d \cdot b}{2} = e \cdot b$,

Gde je b - debljina limenog paketa, izraz za induktivnost je oblika:

$$L = N \cdot \frac{\Phi}{I} = N \cdot \frac{B_0 \cdot S_0}{I} = N \cdot \frac{B_1 \cdot S_1}{I} = N \cdot \frac{B \cdot 2S_2}{I} \quad (1.2.1)$$

Koristeći Amperov zakon o cirkulaciji vektora \vec{H}

$$\oint \vec{H} dl = N \cdot I = H_0 \delta + H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 \quad (1.2.2)$$

i zakona o konzervaciji fluksa

$$\Phi = B \cdot S = B_1 \cdot S_1 \cdot f_e = 2B_2 \cdot S_2 \cdot f_e = B_0 \cdot S_1, \quad (1.2.3)$$

gde je

$$B = \mu_0 \cdot \mu_1 \cdot H; \quad S_1 = S_0; \quad S_1 = 2S_2 \quad (1.2.4)$$

dobija se

$$I = 2 \frac{B_0}{\mu_0 \cdot N} \left(\delta + \frac{1}{f_e} \cdot \frac{l_1}{\mu_1} + \frac{1}{f_e} \cdot \frac{l_2}{\mu_2} \cdot \frac{S_1}{2S_2} \right). \quad (1.2.5)$$

Smenom (1.2.1) u (1.2.5) \Rightarrow

$$L = \frac{N \cdot B_0 \cdot S_0}{\frac{B_0}{\mu_0 \cdot N} \left(\delta + \frac{1}{f_e} \cdot \frac{l_1}{\mu_1} + \frac{1}{f_e} \cdot \frac{l_2}{\mu_2} \cdot \frac{S_1}{2S_2} \right)}, \quad (1.2.6)$$

odnosno

$$L = \mu_0 \cdot \frac{N^2 S_1}{\delta'} \quad (1.2.7)$$

gde je

$$\delta' = \delta + \frac{1}{f_e} \cdot \frac{l_1}{\mu_1} + \frac{1}{f_e} \cdot \frac{l_2}{\mu_2} \cdot \frac{S_1}{2S_2} \quad (1.2.8)$$

svedeno međugvožđe. Pošto je $S_1 = 2S_2$ kod standardnih limova važi $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, tada je

$$\delta' = \delta + \frac{1}{f_e \cdot \mu} (l_1 + l_2) = \delta + \frac{l_e}{f_e \cdot \mu}. \quad (1.2.9)$$

Zadatak 1.3

Smatrajući definiciju geometrijskih parametara jezgra Γ_1 i Γ_2 poznatim, za prosto zatvoreno jezgro od n delova, poznatih parametara μ_i , l_i i S_i ($i=1, \dots, n$) i jednim zazorom (l_0, S_0) izraziti:

- $\bar{\mu}$ - srednju propustljivost svih magnetnih delova jezgra i μ_e - ekvivalentnu propustljivost celog magnetnog kola (sa zazorom), u zavisnosti od navedenih poznatih parametara.
- Ako su propustljivosti delova vrlo visoke a l_0 ne tako malo, na šta se svodi izraz μ_e ? Da li sada μ_e zavisi od μ_i -ova?
- U slučaju kola sa samo jednim magnetskim delom (μ_1, l_1, S_1) koliko je $\bar{\mu}$ i da li je ono jednako sa μ_1 ?

REŠENJE

a) Polazeći od izraza za induktivnost kalema sa jezgrom

$$L = \frac{N \cdot \Phi}{I} = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2 \cdot \mu_0}{\frac{l_0}{S_0} + \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\mu_i S_i}} = \frac{N^2 \cdot \mu_0}{\frac{l_0}{S_0} + \frac{l'_e - l_0}{\bar{\mu} \cdot S'_e}} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_e \cdot S_e \cdot N^2}{l_e - l_0} \quad (1.3.1)$$

$$L = \mu_0 \cdot \mu_e \cdot \frac{S_e \cdot N^2}{l_e} \quad (1.3.2)$$

$$\Rightarrow \frac{l'_e - l_0}{\bar{\mu} \cdot S'_e} = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\mu_i \cdot S_i}, \quad (1.3.3)$$

odnosno:

$$\bar{\mu} = \frac{l'_e - l_0}{S'_e \cdot \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\mu_i \cdot S_i}} = \frac{S_e \cdot \Gamma_1}{S'_e \cdot \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\mu_i \cdot S_i}}. \quad (1.3.4)$$

$$\mu_e = \frac{l'_e - l_0}{S_e \cdot \left(\frac{l_0}{S_0} + \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\mu_i \cdot S_i} \right)} = \frac{l_e}{S_e \cdot \left(\frac{l_0}{S_0} + \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\mu_i \cdot S_i} \right)} = \frac{\Gamma_1}{\frac{l_0}{S_0} + \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\mu_i \cdot S_i}}, \quad (1.3.5)$$

gde su:

$$\Gamma_1 = \frac{l'_e - l_0}{S_e} = \frac{l_e}{S_e}; \quad \Gamma_2 = \frac{l_e}{S_e^2}; \quad S_e = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}; \quad l_e = \frac{\Gamma_1^2}{\Gamma_2}. \quad (1.3.6)$$

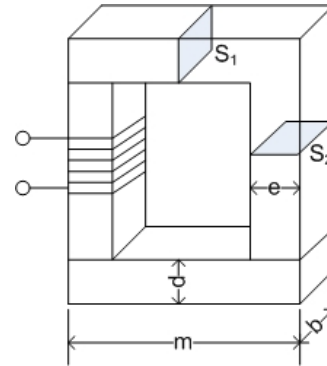
b) Zaključak se lako izvodi iz (5).

$$\text{c) Iz (4)} \Rightarrow \bar{\mu} = \frac{l'_e - l_0}{S'_e \cdot \frac{l_1}{\mu_1 \cdot S_1}}, \quad (1.3.7)$$

što znači da je $\bar{\mu} \neq \mu_1$, odnosno biće $\bar{\mu} = \mu_1$ ako je $l_1 = l'_e - l_0$; a $S'_e = S_1$. (Obzirom da je zapremina jezgra $V = l_i \cdot S_i \neq V_e = l_e \cdot S_e$ obično je $\bar{\mu} \neq \mu_1$).

Zadatak 1.4

Odrediti broj zavojaka prigušnice koja ima induktivnost $L = 4 \text{ H}$ i struju predmagnećenja $I = 20 \text{ mA}$, ako je jezgro standardnih dinamo limova profila $L = 59$, složenih kao na slici, izolovani akrementalom, debljine paketa $b = 6 \text{ mm}$.



REŠENJE

Induktivnost kalema je

$$L = N \cdot \frac{\Phi}{I} = N \cdot \frac{B_1 \cdot S_1}{I} \quad (1.4.1)$$

$$N = \frac{L \cdot I}{B_1 \cdot S_1} = f_1(B_1) \quad (1.4.2)$$

Polazeći od Amperovog zakona o cirkulaciji vektora \vec{H}

$$\oint H dl = N \cdot I = 2(H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2) \quad (1.4.3)$$

i koristeći zakon o konzervaciji fluksa

$$\Phi = B_1 \cdot S_1 = B_2 \cdot S_2 = B \cdot S, \quad (1.4.4)$$

Dobija se

$$N = 2 \frac{B_1}{\mu_0 \cdot I} \left(\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{l_2}{\mu_2} \cdot \frac{S_1}{S_2} \right) = f_2(B_1) \quad (1.4.5)$$

Za lim profila $L = 59$ iz tablice (Dodatak 4) nalazimo: $l = 59 \text{ mm}$, $d = 9 \text{ mm}$, $m = 13 \text{ mm}$, $g = 50 \text{ mm}$, $e = 5 \text{ mm}$, $\Delta = 0,35 \text{ mm}$, $f = 2,8 \text{ mm}$.

Iz teksta zadatka je $b = 6 \text{ mm}$. Sa slike i na osnovu podatka sledi $l_1 = m - e = 8 \text{ mm}$ $l_2 = l = 59 \text{ mm}$.

$$N = \frac{L \cdot I}{B_1 \cdot S_1} \quad (1.4.6)$$

$$N = \frac{2}{I} (H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2) \quad (1.4.7)$$

Gde su:

$$H_1 = H_1(B_1); \quad H_2 = H_2(B_2); \quad (1.4.8)$$

$$B_1 S_1 = B_2 S_2 \Rightarrow B_2 = B_1 \cdot \frac{S_1}{S_2} \quad (1.4.9)$$

$$S_1 = b \cdot d \cdot f_e = 0,6 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 0,486 \text{ cm}^2 \quad (1.4.10)$$

$$S_2 = b \cdot d \cdot f_e = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,9 = 0,27 \text{ cm}^2 \quad (1.4.11)$$

Uz usvojenu vrednost $f_e = 0,9$.

Na osnovu (1.4.4) sledi

$$B_2 = B_1 \cdot \frac{S_1}{S_2} = \frac{0,486}{0,27} \cdot B_1 = 1,8 \cdot B_1 \quad (1.4.12)$$

Iz jednačina (1.4.2) i (1.4.5), kada se smene brojne vrednosti za $L; I; l_1; l_2; S_1; S_2$ i $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-8} \frac{\text{H}}{\text{m}}$

dobija se :

$$N = 1,646 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{B_1} = f_1(B_1). \quad (1.4.13)$$

$$N = 7,96178 \cdot 10^5 \cdot B_1 \left(\frac{0,8}{\mu_1(B_1)} + \frac{10,62}{\mu_2(B_2)} \right) = f_2(B_1), \quad (1.4.14)$$

gde je induktivnost B u teslama $[T]$.

Usvajajući vrednosti za B_1 na osnovu dijagrama $\mu = \mu(B)$ (Dodatak 9) za dinamo limove (Dodatak 4) dolazi se do rezultata koji su prikazani u tablici.

$B_1 [T]$	0,2	0,4	0,6	0,8
$B_2 = 1,8 \cdot B_1 [T]$	0,36	0,72	1,08	1,44
$\mu_1 = \mu_1(B)$	4950	6000	5890	4500
$\mu_2 = \mu_2(B)$	5850	5100	2550	800
$N = f_1(B_1)$	8230	4115	2743	2058
$N = f_2(B_1)$	315	706	2055	8569

Na osnovu podataka u tablici nacrtaju se dijagrami $N = f_1(B_1)$ i $N = f_2(B_1)$ i iz preseka te dve krive dobija se traženi broj zavojava prigušnice za date uslove $N \approx 2550$ zavojava.

Zadatak 1.5

Za filter frekvencije $f = 500 \text{ Hz}$ potrebno je proračunati prigušnicu sledećih karakteristika:

- Induktivnost $L = 0,2 \text{ H}$;
- Q faktor $Q > 20$;
- struja $I = 50 \text{ mA}$;
- gustina struje $J = 2,5 \text{ A/mm}^2$;
- magnetna indukcija $B_m = 1,1 \text{ T}$. (To je ukupna radna indukcija).

Za jezgro upotrebiti dinamo lim IV profila M-42, debljine $\Delta = 0,35 \text{ mm}$, sa međugvoždem $\delta = 1 \text{ mm}$. Namotaje motati na standardno kalemsko telo. Pri proračunu zanemariti debljinu kalemskog tela. Smatrati da je žica izolovana lakom, a da je izolacija između limova od hartije debljine $30 \text{ }\mu\text{m}$. (Koristiti μ_{stat} u dinamo limovima).

REŠENJE

Dinamo lim tipa M i njegove standardne dimenzije po DIN-u dati su na slici i tabelarno (Dodatak 3).
M 42:

$$h = 42 \text{ mm} \quad c = 30 \text{ mm}$$

$$L = 42 \text{ mm} \quad d = 12 \text{ mm}$$

$$e = 6 \text{ mm} \quad a = 9 \text{ mm}$$

$$s = 3,2 \text{ mm} \quad i = 36 \text{ mm}$$

Induktivnost prigušnice može se naći po obrascu:

$$L = \mu_0 \cdot \frac{S}{\delta'} \cdot N^2 = 1,256 \cdot \frac{S}{\delta'} \cdot N^2 \cdot 10^{-8} \text{ [H]} \quad (1.5.1)$$

Gde su:

$$\delta' = \delta + \frac{1}{f_e} \cdot \frac{l_e}{\mu}; \quad S = b \cdot d; \quad Seff = s \cdot f_e; \quad (1.5.2)$$

$f_e = 0,91$ iz tabele (Dodatak 3) pri čemu su $S \text{ [cm}^2\text{]}$, $\delta \text{ [cm]}$;

$$l_e = 2 \cdot (a + c) + \Pi \cdot e = 9,6 \text{ cm}. \quad (1.5.3)$$

Za dati profil M-42 iz tabele se nalazi:

$$a = 9 \text{ mm} \quad d = 12 \text{ mm} \quad l = 42 \text{ mm}$$

$$e = 6 \text{ mm} \quad c = 30 \text{ mm} \quad b = 15 \text{ mm}$$

$$s = b \cdot d = 4,5 \cdot 1,2 = 1,8 \text{ cm}^2; \quad Seff = s \cdot f_e = 1,8 \cdot 0,91 = 1,638 \text{ cm}^2.$$

Radna indukcija je u gvožđu:

$$B = \frac{B_m}{f_e} = \frac{1,1}{0,91} = 1,20879 \cong 1,2 \text{ T}. \quad (1.5.4)$$

Sa dijagrama se očitava (Dodatak 18) $H = H(B) = H(1,2T) = 7 \text{ [A/cm]}$.

Pa se dobija:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 \cdot H} = \frac{1,2 \cdot T}{4 \cdot \Pi \cdot 10^{-7} \cdot 700} = 1364 \quad (1.5.5)$$

$$\delta' = 0,1 + \frac{9,6}{0,91 \cdot 1364} = 0,1077 \text{ cm}. \quad (1.5.6)$$

Iz jednačine (1.5.1) $\Rightarrow N = \sqrt{\frac{L \cdot \delta' \cdot 10^8}{1,256 \cdot S}} = \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,1077 \cdot 10^8}{1,256 \cdot 1,8}} \cong 976$ zavojaka.

Na osnovu poznatih podataka nalazi se minimalni prečnik žice $d_{\min} = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{I}{J}} = 0,161 \text{ mm}$.

Iz tablice (Dodatak 1) se bira prvi veći standardni prečnik žice i odgovarajući prečnik žice sa izolacijom (lakom):

$$d_{\min} = 0,18 \text{ mm}$$

$$d_{s,\min} = 0,21 \text{ mm}$$

Na osnovu uslova $Q > 20 \Rightarrow Q = \frac{\omega \cdot L}{R} > 20 \Rightarrow R < \frac{\omega \cdot L}{20} = \frac{2 \cdot \Pi \cdot f \cdot L}{20} = \frac{2 \cdot \Pi \cdot 500 \cdot 0,2}{20} = 31,4 \ \Omega$.

Dakle mora biti $R < 31,4 \ \Omega$

Otpornost R kalemskog namotaja može se odrediti iz obrasca

$$R = \rho_{cu} \cdot \frac{l}{\frac{\Pi \cdot d_g^2}{4}} = \frac{4 \cdot \rho_{cu}}{\Pi} \cdot \frac{N \cdot l_m}{d_{\min}^2} = N \cdot R' \cdot l_m, \quad (1.5.7)$$

gde je:

N - izračunati broj zavojaka

l_m - dužina srednjeg navojka

ρ_{cu} - specifična otpornost žice namotaja

R' - podužna otpornost namotaja.

Dimenzije kalemskog tela određuju se prema dimenzijama limenog paketa (Dodatak 3). Ako su dimenzije kalemskog tela na slici (Dodatak 14) onda postoji sledeći odnos tih dimenzija:

U napred navedenim dimenzijama slova označavaju:

$a = 9$ - širinu prozora lima (cm)

$b = 15$ - debljinu limenog paketa (cm)

$c = 30$ - visinu prozora lima (cm)

$d = 12$ - širinu jezika lima (cm)

$s = 0,5$ - debljinu kalemskog tela (cm)

(za profil M)

širina prozora tela $g = d + s$ (cm)

visina prozora tela $f = b + s$ (cm)

širina spoljnog dela tela $m = d + 3s$ (cm)

visina spoljnog dela tela $n = b + 3s$ (cm)

širina kalemskog tela $q = (2a + d) - 2s$ (cm)

visina kalemskog tela $t = (2a + b) - 2s$ (cm)

dužina kalemskog tela $p = c - 5s$ (cm)

Iz gornjih formula mogu se proračunati dimenzije kalemskog tela koje odgovara dinamo limu M-42. Te dimenzije su sledeće:

$$q = 29 \text{ mm} \quad l = 26,4 \text{ mm}$$

$$g = 12,5 \text{ mm} \quad t = 34 \text{ mm}$$

$$f = 16 \text{ mm}$$

Debljina zida kalemskog tela s određuje se iz sledeće tabele:

P_2 [VA]	1-10	10-200	200-500	500-1.000
s cm	0,05	0,1	0,2	0,3

Broj zavojaka u jednom sloju je

$$N' = \frac{l}{d_{s,\min}} = \frac{26,4}{0,21} = 126 \text{ zavojaka.} \quad (1.5.8)$$

Broj slojeva žice je

$$Z \frac{N'}{N} = \frac{976}{126} \cong 8 \text{ slojeva} \quad (1.5.9)$$

Obim spoljašnje konture je

$$l_s = 2m + 2n + 8 \cdot z \cdot ds. \quad (1.5.10)$$

Obim unutrašnje konture je

$$l_0 = 2m + 2n. \quad (1.5.11)$$

Odatle sledi da je dužina srednjeg navojka

$$l_m = 2(m + n + 2 \cdot z \cdot ds) = 2(g + f + 2 \cdot z \cdot ds + 4s) \quad (1.5.12)$$

(gde je usvojeno $s \cong 0$)

$$l_m \approx 2(g + f + 2 \cdot z \cdot ds) = 63,72 \text{ mm.} \quad (1.5.13)$$

Sada se može odrediti podužna otpornost

$$R' = \frac{4\rho}{\pi \cdot d^2} = 0,689 \frac{\Omega}{m} \text{ i ukupna otpornost } R = N' \cdot R' \cdot l_m = 976 \cdot 0,689 \cdot 0,06372 \cong 42 \Omega.$$

Da bi bio ispunjen uslov $Q > 20$, tj. $R < 31,4 \Omega$ mora se usvojiti veći prečnik žice i to prema relaciji (približno).

$$d_{\min} \cong d_{\text{staro}} \sqrt{\frac{R}{R_{\max}}}, \quad (1.5.14)$$

a posle toga se mora proveriti mogućnost smeštaja na odabrano kalemsko telo dobijenog broja zavojaka, odnosno valjanost dimenzija lima.

Zadatak 1.6

Prigušnice sa jezgrom malog procepa sastavljena je od dinamo limova tipa EI-84 sa 4% Si, debljine $\Delta = 0,35 \text{ mm}$. Limovi su izolovani slojem laka debljine $20 \text{ }\mu\text{m}$.

- a) Naći broj navojaka N i debljine paketa b ako je $L = 10 \text{ H}$; struja magnećenja $I = 30 \text{ mA}$.
- b) Naći maksimalnu induktivnost ove prigušnice pri struji magnećenja $I = 200 \text{ mA}$, za isti broj zavojaka, smatrajući da se može primeniti Hann-in dijagram za ovaj slučaj.
- c) Ako ova ista prigušnica ima procep od 0,001; 0,04 i 0,1 mm i ako je struja magnećenja $I = 30 \text{ mA}$ nacrtati $L = f(p)$; gde je p - procep.

REŠENJE

a) Iz izraza za induktivnost prigušnice

$$L = \mu_0 \cdot \frac{S}{\delta'} \cdot N^2 \quad (1.6.1)$$

gde je $\delta' = \delta'(\mu\delta)$ vidi se, da se ne može odrediti broj zavojaka N , jer je nepoznato μ odnosno B kao i veličina procepa δ .

Računarska metoda za određivanje induktivnosti, u ovom slučaju, zasniva se na koršćenju posebnog dijagrama po autoru Hann-u, koji je dat na slici (Dodatak 13) a predstavlja anvelopu maksimuma krivih

$W_L = W_L(H_e)$ za razno ξ . Drugim rečima, sa Hann-inog dijagrama se mogu očitati maksimalne vrednosti induktivnosti L za određeni broj zavojaka N kalema i zadatom vrednosti međugvožđa δ . Na slikama su: S - presek jezgra (u cm),

l_e [cm] - srednja dužina magnetnih linija u gvožđu,

I - jednosmerna struja,

L - induktivnost,

N - broj navojaka,

l_0 - procep.

Da bi odredili geometrijske parametre sile potrebno je za E-I 84 očitati dimenzije i one su:

$$\begin{aligned} h = l = 84 \text{ mm} & \quad c = 42 \text{ mm} & \quad b = 28 \text{ mm} \\ e = 14 \text{ mm} & \quad d = 28 \text{ mm} & \quad f = 4,5 \text{ mm} \\ a = 14 \text{ mm} & \quad \left(s = d^2 = b^2 \quad d = b \right) \end{aligned}$$

$$f_e = 0,95 ; \quad l_e = 16,8 \text{ cm}.$$

$$S_{eff} = b \cdot d \cdot f_e = 7,84 ; \quad s = \frac{S_{eff}}{f_e} = 8,26 \text{ cm}. \quad (1.6.2)$$

Znajući L , I , S i l_e nalazimo W_L a onda na sl. 6.1. očitamo H_e i nalazimo N .

$$W_L = \frac{L \cdot I^2}{S \cdot l_e} = \frac{10 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{8,26 \cdot 16,8} \approx 0,28 \cdot 10^{-4} \left[\frac{\text{HA}^2}{\text{cm}^3} \right] \Rightarrow H_e = 0,9 \left[\frac{\text{A}}{\text{cm}} \right]. \quad (1.6.3)$$

$$N = \frac{H_e \cdot l_e}{I} = \frac{0,9 \cdot 16,8}{20 \cdot 10^{-3}} \approx 756 \text{ zavojaka}. \quad (1.6.4)$$

b) Iz

$$H = \frac{N \cdot I}{l_e} = \frac{756 \cdot 10^{-1}}{16,8} \approx 4,5 \left[\frac{A}{cm} \right] \quad (1.6.5)$$

sledi sa dijagrama

$$W_L = \frac{L \cdot I^2}{S \cdot l_e} = 1,5 \cdot 10^{-4} \left[\frac{HA^2}{cm^3} \right] \Rightarrow L = W_L \cdot \frac{S \cdot l_e}{I^2} \approx 2,15 \text{ H} \quad (1.6.6)$$

c) Iz

$$\xi_1 = \frac{\delta_{01}}{l_e} = \frac{2p_1}{l_e} = 1,19 \cdot 10^{-3}; \quad \xi_2 = \frac{2p_2}{l_e} = 4,76 \cdot 10^{-3}; \quad \xi_3 = \frac{2p_3}{l_e} = 0,0119 \quad (1.6.7)$$

sledi

$$W_{L1} = 4 \cdot 10^{-4} \left[\frac{HA^2}{cm^3} \right], \quad W_{L1} = 4 \cdot 10^{-4} \left[\frac{HA^2}{cm^3} \right] L_1 = 1,85 \text{ H}; L_2 = 4,6 \text{ H}; L_1 = 26,8 \text{ H} \quad (1.6.8)$$

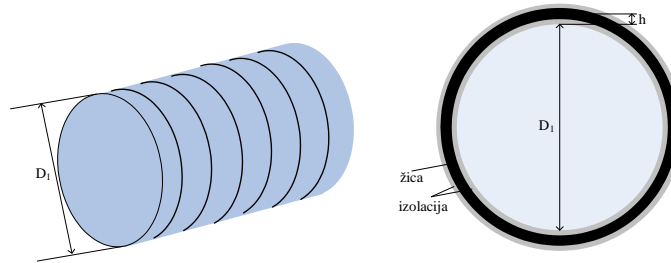
Zadatak 1.7

Polazeći od izraza za otpornost kalema

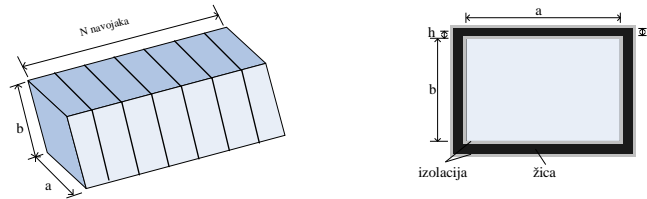
$$R_0 = \rho \cdot \frac{l_m \cdot N}{\frac{\Pi \cdot d^2}{4}} = \frac{\rho \cdot l_m \cdot N^2}{f_n \cdot S_n} \equiv C_0 \cdot N^2$$

izvesti izraz za C_0 kod:

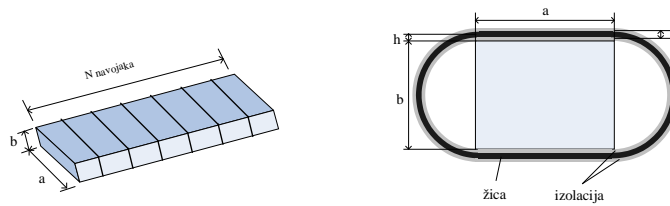
- a) kalema sa jezgrom kružnog oblika,
- b) kalema sa jezgrom pravougaonog oblika,
- c) kalema sa jezgrom pljosnatog oblika.



CILINDRICNO JEZGRO



PRAVOUGAONO JEZGRO



PLJOSNATO JEZGRO

REŠENJE

Polazeći od izraza

$$R_0 = \rho \cdot \frac{l_m \cdot N}{\frac{\Pi \cdot d^2}{4}} = \frac{\zeta \cdot l_m}{f_n \cdot l \cdot h} \cdot N \equiv C_0 \cdot N^2 \tag{1.7.1}$$

gde je

$$f_n = \frac{\Pi \cdot d^2}{4 \cdot l \cdot h} \tag{1.7.2}$$

- računalac ispune kalema navojcima,

l - dužina kalema,

h - visina navojka,

d - prečnik žice bez izolacije,

l_m - dužina srednjeg navojka,

može se l_m izraziti preko dimenzija kalema i odrediti C_0 .

a) prema slici a) je

$$l_m = \Pi \cdot (D_1 + h) \quad (1.7.3)$$

Tako da se izraz za R_0 može izraziti preko kvadrata broja navojaka (N^2) dužine kalemskog tela (l), visine navojaka (h), prečnika kalemskog tela (D_1) i faktora ispune.

Otpornost namotaja biće:

$$R_0 = \rho \cdot \frac{l_1}{S} = \rho \cdot \frac{N \cdot \Pi \cdot (D + h) \cdot 10^{-3}}{\frac{\Pi \cdot d^2}{4}} \quad [\Omega] \quad (1.7.4)$$

, gde je $\rho \left[\frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}} \right]$ a dimenzije u $[\text{cm}]$.

$$R_0 = \frac{\Pi \cdot \rho \cdot 10^{-3}}{f_n \cdot l \cdot h} \cdot (D_1 + h) \cdot N^2 \equiv C \cdot N^2 \quad [\Omega] \quad (1.7.5)$$

gde je

$$C = \frac{\Pi \cdot \rho \cdot 10^{-3}}{l \cdot h \cdot f_n} \cdot (D_1 + h). \quad (1.7.6)$$

b) Ako su a i b širina i visina jezgra u mm (prema sl.) tada je kod pravougaonog oblika:

$$l_m = 2(a + b + h) \cdot 10^{-3} \quad [m] \quad (1.7.7)$$

$$l_1 = N \cdot 2(a + b + h) \cdot 10^{-3} \quad [m] \quad (1.7.8)$$

Otpornost namotaja biće

$$R_0 = \rho \cdot \frac{l_1}{S} = C \cdot N^2 \quad [\Omega] \quad (1.7.9)$$

gde je

$$C = \frac{2 \cdot \rho \cdot 10^{-3} \cdot (a + b + 2h)}{l \cdot h \cdot f_n} \quad (1.7.10)$$

c) Kod kalema pljosnatog oblika važi

$$l_m = \left[\Pi \cdot (b + h) + 2a \right] \cdot 10^{-3} \quad [m] \quad (1.7.11)$$

$$l_1 = N \cdot l_m \quad (1.7.12)$$

$$R_0 = \rho \cdot \frac{l_1}{S} = C \cdot N^2 \quad [r] \quad (1.7.13)$$

$$\Rightarrow C = \frac{\Pi \cdot \rho \cdot 10^{-3}}{l \cdot h \cdot f_n} \cdot \left(b + h + \frac{2a}{\Pi} \right). \quad (1.7.14)$$

1.1 KALEMOVI BEZ JEZGRA

Zadatak 1.8

Odrediti broj zavojaka i sopstvenu kapacitivnost jednostavnih kalemova realizovanih motanjem, navojak do navojka žice prečnika $d_s = 0,2 \text{ mm}$, izolovane lakom, na kalemskim telima prečnika $d_{i1} = 10 \text{ mm}$, $d_{i2} = 12 \text{ mm}$, $d_{i3} = 15 \text{ mm}$ i $d_{i4} = 20 \text{ mm}$, ako su induktivnosti tih kalemova $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 40 \text{ } \mu\text{H}$. Pri proračunu sopstvene kapacitivnosti koristiti obrasce:

$$\text{a) } C_{0z} = \frac{\Pi \cdot d_0}{3,6 \cdot \text{arch}\left(\frac{p}{d}\right)} [pF]; d_0 [cm]$$

$$\text{b) } \frac{C_{0z}}{d_0} = \frac{2,085}{\text{arch}\left(\frac{p}{d}\right)} \cdot \xi_z (l/d_0) \left[\frac{pF}{cm} \right]$$

Dobijene rezultate pod a) i b) međusobno uporediti.

REŠENJE

Polazeći od obrasca za induktivnost po Kammerloher-u:

$$L = k_1 \cdot N_C^2 \cdot d_0^3 = k_2 \cdot N_C^2 \cdot l^3 \quad (1.8.1)$$

$$N_C = \frac{N}{l} = \frac{l}{p}, \quad (1.8.2)$$

gde je p - Korak kalema, može se doći do rešenja. Pošto su navojci gusto namotani (jedan do drugoga)

$$N_C = \frac{l}{p} = \frac{1}{d_s} = \frac{1}{0,021} \approx 48 \frac{\text{zav}}{\text{cm}} \quad (1.8.3)$$

($d_s = 0,21 \text{ mm}$ iz dodatka 1 $\Rightarrow d_z = 0,18 \text{ mm}$).

Pa je

$$L = k_1 \cdot \frac{d_0^3}{d_s^2} \Rightarrow k_1 = L \cdot \frac{d_s^2}{d_0^3} \quad (1.8.4)$$

$$k_{11} = 40 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(0,021)^2}{(1,02)^3} = 17,64 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{1}{(1,021)^3} = 16,57 \cdot 10^{-9} \Rightarrow \quad (1.8.5)$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{d_{01}} = 2,1 \Rightarrow l_1 = 21,4 \text{ mm}$$

$$k_{12} = 17,64 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{1}{1,221^3} = 9,7 \cdot 10^{-9} \Rightarrow \frac{l_2}{d_{02}} = 2,1 \Rightarrow l_2 = 14 \text{ mm}$$

$$k_{13} = 17,64 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{1}{1,521^3} = 5 \cdot 10^{-9} \Rightarrow \frac{l_3}{d_{03}} = 0,8 \Rightarrow l_3 = 12,2 \text{ mm} \quad (1.8.6)$$

$$k_{14} = 17,64 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{1}{2,021^3} = 2,1 \cdot 10^{-9} \Rightarrow \frac{l_4}{d_{04}} = 0,42 \Rightarrow l_4 = 8,5 \text{ mm}$$

$$N = \frac{l}{d_s} \Rightarrow N_1 = \frac{21,4}{0,21} = 101,9 \approx 102 \text{ zav.}$$

$$N_2 = \frac{4}{0,21} = 66,6 \approx 67 \text{ zav.}$$

$$N_3 = \frac{12,2}{0,21} = 58,09 \approx 58 \text{ zav.}$$

$$N_4 = \frac{8,5}{0,21} = 40,47 \approx 41 \text{ zav.}$$

(1.8.7)

a) Pošto je

$$\frac{p}{d} = \frac{d_s}{d} = \frac{0,21}{0,18} = 1,1666 = 1,17$$

(1.8.8)

prema relaciji a) \Rightarrow

$$C_{0z} = \frac{\Pi}{3,6 \cdot \operatorname{arch}\left(\frac{p}{d}\right)} \cdot d_0 \quad [pF] = 2,058 \cdot d_0 \quad [pF].$$

(1.8.9)

$$\left(\operatorname{arch}\left(\frac{p}{d}\right) = \pm l_n \cdot \left(\frac{p}{d} + \sqrt{\left(\frac{p}{d}\right)^2 - 1} = 0,5696 \right) \right)$$

(1.8.10)

Pa se dobija:

$$C'_{0z} = 1,56 \text{ pF}$$

$$C''_{0z} = 1,87 \text{ pF}$$

$$C'''_{0z} = 2,33 \text{ pF}$$

$$C^{IV}_{0z} = 3,10 \text{ pF}$$

b)

$$C_{0z} = \frac{2,085}{\operatorname{arch}\left(\frac{p}{d}\right)} \cdot d_0 \cdot \varepsilon_z (l/d_0) = 3,66 \cdot d_0 \cdot \varepsilon \quad (z)$$

(1.8.11)

Za $k=1$ sa sl. $\varepsilon = \varepsilon(l/d_0)$

$$\varepsilon'_z(2,1) = 0,52 \frac{pF}{cm} \Rightarrow C'_{0z} = 1,87 \text{ pF}$$

$$\varepsilon''_z(1,15) = 0,48 \frac{pF}{cm} \Rightarrow C''_{0z} = 2,11 \text{ pF}$$

$$\varepsilon'''_z(0,8) = 0,48 \frac{pF}{cm} \Rightarrow C'''_{0z} = 2,64 \text{ pF}$$

$$\varepsilon^{IV}_z(2,1) = 0,52 \frac{pF}{cm} \Rightarrow C^{IV}_{0z} = 3,81 \text{ pF}$$

(1.8.12)

Zadatak 1.9

a) Naći maksimalnu induktivnost jednoslojnog cilindričnog kalema, motanog zavojka do zavojka C_u žicom prečnika $d = 0,6 \text{ mm}$, izolovanom lakom (CuL), koja se može ostvariti sa dužinom žice $l_z = 26 \text{ m}$. Naći prečnik i dužinu ovih namotaja. Induktivnost računati po formuli Weiss-Ollendorf-a u kojoj se zanemaruje kvadratni član po d_0/l .

b) Odrediti međusobnu induktivnost između dva dela ovog kalema dobijena tako što se napravi izvod na 30-tom zavojku. Koristeći formulu Weiss-Ollendorf-a.

REŠENJE

$$L = L' \cdot \frac{l}{l_p} \cong \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{S}{l} \cdot \frac{1}{1 + 0,45 \left(\frac{d_0}{l} \right)}. \quad (1.9.1)$$

Obzirom da je $l = N \cdot d_z$ i $l_z = \Pi \cdot d_0 \cdot N \Rightarrow$

$$\begin{aligned} L &= \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{\Pi}{4} \cdot \frac{\frac{l \cdot \check{z}}{\Pi \cdot N^2}}{N \cdot d_z + 0,45 \cdot \frac{l_z}{\Pi \cdot N}} = \frac{\mu_0 \cdot l_z^2 \cdot N}{4\Pi \cdot \left(d_z \cdot N^2 + 0,45 \frac{l_z}{\Pi} \right)} = \\ &= \frac{\mu_0 \cdot l_z \cdot N}{4\Pi \cdot d_z \cdot \left(N^2 + 0,45 \frac{l_z}{\Pi \cdot d_z} \right)} \end{aligned} \quad (1.9.2)$$

smenom N sa x ($N \rightarrow x$) dobija se

$$L = \frac{x}{a + x^2}, \quad (1.9.3)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{a + x^2} \right) = \frac{a + x^2 - 2x^2}{(a + x^2)^2} = 0 \quad (1.9.4)$$

odakle $\Rightarrow a = x^2$,

$$N = \sqrt{\frac{0,45 \cdot l_z}{d_z}} = \sqrt{5642,77} \approx 75,1 \approx 75 \text{ namotaja}. \quad (1.9.5)$$

$L = 689,93 \mu\text{H}$, $d_0 = 11,03 \text{ cm}$, $l = N \cdot d_z = 4,95 \text{ cm}$, $\left(\frac{l}{d_0} = 0,45 \right)$, gde je uzeto $d_z = 0,66$ (to je žica sa izolacijom od laka (CuL), prema dodatku 1).

Obzirom da je $\frac{l}{d_0} = 0,45 > 0,2 \Rightarrow$ da je greška usled zanemarivanja člana $\left(\frac{l}{d_0} \right)^2$ manja od 1%.

b) Kalem se deli na dva kalema, AB i BC, formiranjem 30-og izvoda

$$L_{AC} = L_{AB} + L_{BC} + 2M \Rightarrow M = \frac{L_{AC} - L_{AB} - L_{BC}}{2}. \quad (1.9.6)$$

$$l_{AB} = \frac{30}{75} \cdot 4,95 = 1,98 \text{ cm} \cdot L_{AB} = \mu_0 \cdot \frac{\Pi}{4} \cdot \frac{N_{AB}^2 \cdot d_0^2}{l_{AB} \cdot \left(1 + 0,45 \cdot \frac{d_0}{l} - 0,005 \cdot \left(\frac{d_0}{l}\right)^2\right)} \approx 162,76 \mu\text{H} \quad (1.9.7)$$

$$L_{BC} = \mu_0 \cdot \frac{\Pi}{4} \cdot \frac{N_{BC}^2 \cdot d_0^2}{l_{AB} \cdot \left(1 + 0,45 \cdot \frac{d_0}{l} - 0,005 \cdot \left(\frac{d_0}{l}\right)^2\right)} \approx 314,61 \mu\text{H} \quad (1.9.8)$$

$$L_{AC} = \dots = 689,93 \mu\text{H}$$

$$M = \frac{L_{AC} - L_{AB} - L_{BC}}{2} = 106 \mu\text{H}.$$

Zadatak 1.10

- a) Kratak jednoslojni cilindrični kalem treba da ima $L = 0,1 \text{ mH}$, prečnik kalemskog tela $d_i = 6 \text{ cm}$, a prečnik žice $d = 0,22 \text{ mm}$ (Cu LS) i $C_{0z} \leq 3 \text{ pF}$. Odrediti broj zavojava N i dužinu kalema l , koristeći za C_{0z} aproksimativnu formulu, a za L obrazac po Kamerloer-u.
- b) Koliki je optimalni prečnik žice d_{opt} na $f = 200 \text{ kHz}$ u odnosu na gubitke (omski, skin efekat, blizinski efekat) i koliko iznosi parazitivna kapacitivnost kada se d_z iz dela a zameni sa d_{zopt} .

REŠENJE

a) Iz dodatka 1 $d = 0,22 \text{ mm}$ očita se $d_s = 0,3 \text{ mm}$.

Srednji prečnik kalema je $d_0 = d_i + d_s = 60,3 \text{ mm}$.

Polazeći od aproksimativnog obrasca

$$C_{0z} = \frac{\Pi \cdot d_0}{3,6 \cdot \text{arch}\left(\frac{p}{d}\right)} \Rightarrow \frac{p}{d} = Ch\left(\frac{\Pi \cdot d_0}{C_{0z} \cdot 3,6}\right) = Ch\left(\frac{\Pi \cdot d_0}{3 \cdot 3,6}\right) = Ch(1,754) = 2,954 \approx 3 \quad (1.10.1)$$

Tako da je u graničnom slučaju ($C_{0z} = 3 \text{ pF}$), $p = 3d = 0,66 \text{ mm}$.

Prema obrascu po Kamerloer-u je

$$L = k \cdot L' = k_1 \cdot \left(\frac{l}{d_0}\right) \cdot N_c^2 \cdot d_0^3 = k_2 \cdot \left(\frac{l}{d_0}\right) \cdot N_c^2 \cdot l^3 \quad [\text{cm}] \quad (1.10.2)$$

Pošto je

$$N_c = \frac{l}{p} \Rightarrow k_1 = \frac{p^2 \cdot L}{d_0^3} = \frac{0,066^2 \cdot 10^{-4}}{(6,03)^3} = 1,987 \cdot 10^{-9} \approx 2 \cdot 10^{-9} \left[\frac{\text{H}}{\text{cm}} \right] \quad (1.10.3)$$

sa grafika (Dodatak 6) $k_1 = k_1 \left(\frac{l}{d_0}\right)$ se očitava $\frac{l}{d_0} = 0,42 \Rightarrow l = 0,42 \cdot d_0 = 2,53 \text{ cm}$.

Broj zavojava je $N = N_c \cdot l = \frac{l}{p} = 38,3 \approx 38$ zavojava.

b) Prema relaciji

$$R = R(f, d_s, d_0, l) = R_0 \left\{ \left[1 + F(x) \right] + b \Psi \left(\frac{x}{4} \right) \cdot G_b(x) \right\} \quad (1.10.4)$$

$$\Psi \equiv 2 \cdot S^2 \cdot h^2 \left(\frac{c}{d_g^2} + \frac{K_b \cdot N^2}{4 \cdot d_0^2} \right)$$

n - broj vlakana gajta

d_g - spoljašnji prečnik gajtna

c - koeficijent za žicu za Cu žicu je $c = 0$ $n = 1$

S - dubina skin efekta

$$x = \frac{d}{s} \quad S = \frac{1}{\sqrt{\Pi \cdot \delta \cdot f \cdot \mu_0 \cdot \mu}} = \frac{5030}{\sqrt{\sigma \cdot f}} \quad [\text{cm}]$$

$$\frac{l}{d} = 0,42 \Rightarrow K_b = 10$$

$$\sigma = 58 \text{ s} \cdot \frac{\text{m}}{\text{mm}^2} = 5,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{s}}{\text{cm}}$$

Vrednost parametra s se očitava sa dijagrama (Dodatak 15)

$$s(200 \text{ kHz}) = 0,0148 \text{ cm}$$

$$\Psi = 0,435$$

Sa dijagrama (Dodatak 9) se očitava $\frac{x_{opt}}{\sqrt{2}} = \xi(\Psi) \Rightarrow \frac{x_{opt}}{\sqrt{2}} = 2,5 \Rightarrow d_{opt} = 2,5 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,148 = 0,52 \text{ mm}$.

$$(d_{zopt} = s \cdot x_{zopt})$$

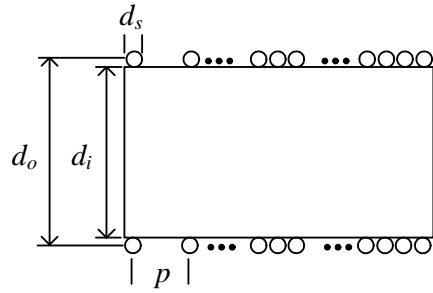
Usvajamo standardno $d = 0,50 \Rightarrow d_s \cdot LS = 0,6 \Rightarrow C_{0z} = 6,75 \text{ pF}$ (približno se može uzeti)

$$\frac{d_{opt}}{s} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(2\Psi)^{\frac{1}{6}}} \text{ za } \Psi > 2000;$$

$$\frac{d_{opt}}{s} = \frac{2}{\Psi} + 1 \text{ za } \Psi \leq 0,3.$$

Zadatak 1.11

Izvršiti proračun visokofrekventnog kratkog cilindričnog jednoslojnog kalema bez jezgra, sa sledeći podacima:
 $L=0.2 \text{ mH}$, $I=12 \text{ mA}$, $l=5 \text{ cm}$, $J=2.5 \text{ A/mm}^2$, $d_0=6.5 \text{ cm}$. Odrediti sopstvenu kapacitivnost kalema.



REŠENJE

$$d_0 = d_i + d_s \quad (1.10.5)$$

Prečnik žice (bez izolacije) dobija se iz izraza

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi \cdot \frac{d^2}{4}} \quad (1.10.6)$$

gde je $d = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{I}{J}} = 0,079 \text{ mm} \approx 0,08 \text{ mm}$

Prečnik žice sa izolacijom d_s očitava se iz dodatka 1 za slučaj izolacijom lakom $d_s=0,095 \text{ mm} \approx 0,1 \text{ mm}$.

Koristeći obrazac po Kammerloher-u za induktivnost

$$L = k_1 \cdot \left(\frac{l}{d_0}\right) \cdot N_c^2 \cdot d_0^3 = k_1 \cdot \left(\frac{N}{l}\right)^2 \cdot d_0^3 \quad (1.10.7)$$

Dobija se

$$N = l \cdot \sqrt{\frac{L}{k_1 \cdot d_0^3}} \cong 194 \text{ zavojka} \quad (1.10.8)$$

pri čemu je

$$k_1 \left(\frac{l}{d_0}\right) = k_1 \left(\frac{5}{6,5}\right) = k_1(0,77) = 4,8 \cdot 10^{-9} \left[\frac{\text{H}}{\text{cm}}\right] \quad (1.10.9)$$

Sopstvena kapacitivnost je

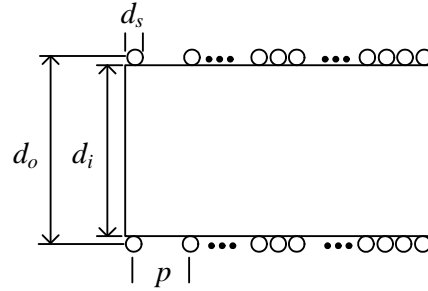
$$C_{0z} = \frac{\pi \cdot d_0}{3,6 \cdot \text{arch}\left(\frac{p}{d}\right)} \approx 3,6 \text{ pF} \quad (1.10.10)$$

gde je korak

$$p = \frac{l}{N} = \frac{5}{194} \approx 0,025 \text{ cm} = 0,25 \text{ mm} \quad (1.10.11)$$

Zadatak 1.12

Kratak jednoslojni cilindrični kalem treba da ima: $L = 0,1 \text{ mH}$, $d_i = 6 \text{ cm}$, $d_z = 0,22 \text{ mm}$, gde je d_i - prečnik kalemskog tela. Žica je izolovana lakom i svilom. Odrediti broj navojaka N , dužinu kalema l i induktivnost L da bi bilo $C_0 \leq 3 \text{ pF}$.



REŠENJE

Iz tabele (Dodatak 1) se očitava $d_s \approx 0,3 \text{ mm}$ za $d_z = 0,22 \text{ mm}$.

Sada se može računati

$$d_0 = d_i + d_s = 6,03 \text{ cm}$$

Iz obrazca

$$C_{0z} = \frac{\pi \cdot d_0}{3,6 \cdot \operatorname{arch}\left(\frac{p}{d_z}\right)} \quad (1.10.12)$$

Može se izračunati odnos

$$p = d_z \cosh \frac{\pi \cdot d_0}{3,6 \cdot C_{0z}} = 2,973 d_z = 0,66 \text{ mm} \quad (1.10.13)$$

Prema Kammerloher-ovom obrascu je:

$$L = k_1 \cdot N_c^2 \cdot d_0^3 = k_1 \cdot \left(\frac{N}{l}\right)^2 \cdot d_0^3 = k_1 \cdot \frac{1}{p^2} \cdot d^3, \quad (1.10.14)$$

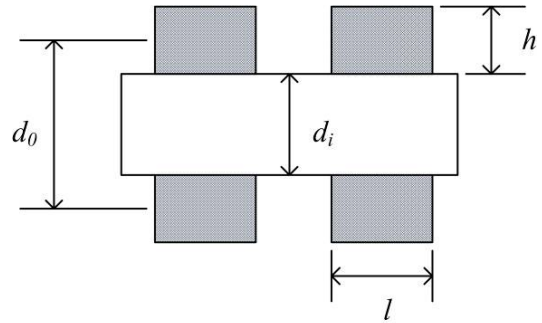
$$k_1 = \frac{L \cdot p^2}{d_0^3} = \frac{10^{-4} \cdot (0,066)^2}{(6,03)^3} = 1,9867 \cdot 10^{-9} \approx 2 \cdot 10^{-9} \left[\frac{\text{H}}{\text{cm}} \right]. \quad (1.10.15)$$

Sa dijagrama (Dodatak 6) $k_1 \left(\frac{l}{d_0}\right)$ se očitava $\frac{l}{d_0} = 0,4 \Rightarrow l = 0,4 \cdot d_0 = 2,412 \text{ cm}$.

$$N = \frac{l}{p} = \frac{2,412}{0,066} = 36,4545 \dots \approx 37 \text{ zavojka.} \quad (1.10.16)$$

Zadatak 1.13

Dva potpuno jednaka, kratka višeslojna cilindrična kalema, nalaze se na istom telu. Odrediti kolika treba da bude visina i broj zavojaka jednog kalema, ako mu je induktivnost $500 \mu\text{H}$. Koeficijent sprege kada se kalemovi sasvim približe je $k = 0,6$. Dužina kalema je $l = 0,5 \text{ cm}$, a prečnik kalemskog tela $d_i = 1 \text{ cm}$. Ako je pri namotavanju upotrebljena žica izolovana lakom i svilom, koliki je d_s .



REŠENJE

Prema Weeler-ovom obrascu je

$$L = \frac{0,0787 \cdot d_0^2 \cdot N^2}{3d_0 + 9l + 10h} \quad [\mu\text{H}] \quad (1.11.1)$$

gde je

$$d_0 = d_i + h. \quad (1.11.2)$$

Vidi se da su nepoznati N i h , što nameće traženje još jednog uslova. Kada se kalemovi sasvim približe tada je ukupna induktivnost

$$L_e = L_1 + L_{II} + 2L_{1-II} = 2L + 2L_{12}, \quad (1.11.3)$$

gde je L_{12} međusobna induktivnost.

Pošto je

$$L_e = 2L + 2kL, \quad (1.11.4)$$

odnosno

$$\frac{L_e}{L} = 2 \cdot (1 + k) = 2 \cdot (1 + 0,6) = 3,2. \quad (1.11.5)$$

Obzirom da je

$$L_e = \frac{0,0787 \cdot d_0^2 \cdot (2N)^2}{3d_0 + 9 \cdot (2l) + 10h} \quad [\mu\text{H}], \quad (1.11.6)$$

jer je to jedinstven kalem sa dva puta većim brojem navojaka i dva puta većom dužinom (kada se kalemovi sasvim približe) iz (1.11.1), (1.11.5), (1.11.6) sledi

$$\frac{L_e}{L} = 3,2 = \frac{4 \cdot (3d_0 + 9l + 10h)}{3d_0 + 18l + 10h} \quad (1.11.7)$$

Iz (1.11.7) se dobija

$$h = 0,8 \text{ cm} \Rightarrow d_0 = d_i + L = 1,8 \text{ cm} \quad (1.11.8)$$

$$N = \frac{1}{d_0} \cdot \sqrt{\frac{L \cdot (3d_0 + 9l + 10h)}{0,078 \cdot 10^{-6}}} \approx 190 \text{ zavojaka} \quad (1.11.9)$$

Da bi našli d i d_s određujemo površinsku gustinu navojaka N_0 .

$$N_0 = \frac{N}{l \cdot h} = 475 \frac{\text{zav.}}{\text{cm}^2}, \quad (1.11.10)$$

pa direktno čitamo iz tabele (Dodatak 11).

$$d_s = d_s(N_0) \quad d_s = 0,489 \text{ mm} \text{ i } d = 0,4 \text{ mm}$$

Ako se koristi dijagram po GROVER-u i obrazac po GROVER-u za jedan kalem se dobija:

$$d_i = 1 \text{ cm}; d_0 = d_i + 2h = 2,6 \text{ cm} \Rightarrow \frac{d_i}{d_0} = \frac{1}{2,6} \cong 0,4 \quad (1.11.11)$$

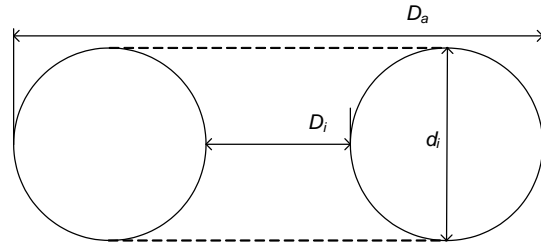
$$\frac{l}{d_0} = \frac{0,5}{1,8} = 0,28$$

Koristeći se dodatkom 7 sa dijagrama se čita $k_{vk} = 5 \cdot 10^{-4}$ pa je

$$L = d_0 \cdot N^2 \cdot K_{VK} \left(\frac{d_i}{d_a}, \frac{l}{d_a} \right) [\mu\text{H}] = 2,6 \cdot 190^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 469,3 \mu\text{H}. \quad (1.11.12)$$

Zadatak 1.14

Na torusnom kalemskom telu (od trolitula), čije su dimenzije $d_i = 2$ cm ; $D_i = 6$ cm ; $D_a = 10$ cm (date na slici), potrebno je namotati višeslojni kalem sa žicom prečnika $d = 0,9$ mm . Žica je izolovana lakom i svilom. Znajući da visina namotaja ne sme da bude veća od 5 mm ($(d_a - d_i) / 2 \leq 5$ mm), i da induktivnost kalema treba da bude $500 \mu\text{H}$, odrediti broj navojaka N i broj slojeva z .



REŠENJE

Za torusne kalemovne je

$$L = 0,314 \cdot \frac{d_0^2 \cdot N^2}{D_0} \cdot 10^{-8} \text{ [H]}, \quad (1.12.1)$$

gde je

$$D_0 = \frac{D_i + D_a}{2} = \frac{6 + 10}{2} = 8 \text{ cm}, \quad (1.12.2)$$

$$d_0 = \frac{d_i + D_a}{2} = d_i + h \leq 2 + 0,5 = 2,5 \text{ cm}, \quad (1.12.3)$$

$$N = \frac{1}{d_0} \cdot \sqrt{\frac{L \cdot D_0}{0,314}} \cdot 10^4 \cong 451 \text{ zavojaka}. \quad (1.12.4)$$

Kako je

$$d_0 = d_i + h \cong d_0 + z \cdot d_s \Rightarrow Z = \frac{d_0 - d_i}{d_c} \quad (1.12.5)$$

gde je z - broj mogućih slojeva; a $d_s = 1,017$ mm (prečnik žice sa izolacijom za $d = 0,9$ mm), dobija se $Z=5$.

Zadatak 1.15

Dva kalem bez jezgra u međufrekventnom transformatoru (I sa krajevima AB i III sa krajevima CD), i induktivnosti $L_{AB} = L_1$ i $L_{CD} = L_{III}$, visine h i dužine l_1 i l_3 respektivno, realizovani su unakrsnim motanjem na zajedničko kalemno telo spoljašnjeg prečnika D , ne međusobnom rastojanju l_2 . Razmak l_2 između I i III kalem predstavlja fiktivni kalem II sa krajevima BC i sa istim brojem zavojaka, po jedinici dužine kao ko I i III kalem.

a) Naći izraz za koeficijent sprege $k = \frac{M_{I-III}}{\sqrt{L_1 \cdot L_{III}}}$ između kalemova L_1 i L_{III} , smatrajući poznatim

induktivnosti L_{XY} ($X, Y = A, B, C, D$) i uzimajući u obzir činjenicu da je međusobna induktivnost kalemova L_{AB} i kalem "L_{II}" jednaka zbiru M_{I-II} i M_{I-III} .

b) Koristeći Wheeler-ov obrazac odrediti $k = f(l_2)$ ako je $l_1 = l_3 = 1$ cm, $h = 1$ cm i $D = 1$ cm. Za koju dužinu l_2 će biti $k = 0,1$?

c) Odrediti broj zavojaka N , prečnik žice d_z (izolacija sa lakom i svilom) i dužinu žice l_z , ako je $L_1 = L_{III} = 400$ μH uz podatke pod b).

REŠENJE

$$\begin{aligned} L_1 &= L_{AB} \\ "L_{II}" &= "L_{BC}" \\ L_{III} &= L_{CD} \end{aligned} \quad (1.13.1)$$

Pošto je data međusobna induktivnost L_{AB} i " L_{BD} " napisaćemo izraz za L_{AD} , a da bi se oslobodili M_{I-III} , izraz za L_{AC} .

$$a) \quad L_{AD} = L_{AB} + L_{BD} + 2 \cdot (M_{I-II} + M_{I-III}) \quad (1.13.2)$$

$$L_{AC} = L_{AB} + L_{BC} + 2 \cdot M_{I-II} \quad (1.13.3)$$

Iz (1.13.2) i (1.13.3) sledi

$$M_{I-III} = \frac{1}{2} \cdot (L_{AD} + L_{BC} - L_{BD} - L_{AC}) \text{ i } k = \frac{M_{I-III}}{\sqrt{L_1 \cdot L_{III}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L_{AD} + L_{BC} - L_{BD} - L_{AC}}{\sqrt{L_{AB} \cdot L_{CD}}} \quad (1.13.4)$$

b) Za $L_1 = L_{III}$ tj. $L_{AB} = L_{CD} \Rightarrow$ zbog simetrije $L_{AC} = L_{BD}$, odnosno

$$k = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{L_{AD}}{L_{AB}} + \frac{L_{BC}}{L_{AB}} - 2 \cdot \frac{L_{AC}}{L_{AB}} \right) \quad (1.13.5)$$

Pošto se radi o kratki višeslojnim kalemovima za proračun svake od induktivnosti $L_{x,y}$ ($x, y = A, B, C, D$) može se primeniti Wheeler-ov obrazac:

$$L = \frac{7 \cdot 87 \cdot d_0^2 \cdot N^2 \cdot 10^{-8}}{3d_0 + 9l + 10h} \text{ [H]} \quad (1.13.6)$$

gde je: N - broj navojaka d_0 , l , i h dimenzije u (cm).

Pošto je podužna gustina zavojka ista za II kao i za I i III kalem

$$N_c = \frac{N}{l}; \left(N_c = \frac{N_1}{l_1}; N_c = \frac{N_2}{l_2}; N_c = \frac{N_3}{l_3} \right) \quad (1.13.7)$$

Zamenom $N = N_c \cdot l$ ($N_1 = N_c \cdot l_1$; $N_2 = N_c \cdot l_2$; $N_3 = N_c \cdot l_3$) u izraze za induktivnost svakog od kalemova (1.13.6), na osnovu (1.13.5) i (1.13.6) dobija se :

$$k = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{3d_0 + 10h + 9l_1}{3d_0 + 10h + 9(l_1 + l_2)} \cdot \left(\frac{2l_1 + l_2}{l_1} \right)^2 + \frac{3d_0 + 10h + 9l_1}{3d_0 + 10h + 9l_2} \cdot \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 - \\ - 2 \cdot \frac{3d_0 + 10h + 9l_1}{3d_0 + 10h + 9(l_1 + l_2)} \cdot \left(\frac{l_1 + l_2}{l_1} \right)^2 \end{array} \right] \quad (1.13.8)$$

Smenjujući brojne vrednosti za l_1 , l_3 , d_0 i h iz (8) \Rightarrow

$$k = \frac{25}{2} \cdot \left[\frac{1}{34 + 9l_2} \cdot (2 + l_2)^2 + \frac{1}{16 + 9l_2} \cdot l_2^2 - \frac{2}{25 + 9l_2} \cdot (1 + l_2)^2 \right].$$

za $k = 0,1 \Rightarrow \frac{2}{250} = \frac{1}{34 + 9l_2} \cdot (4 + 4l_2 + l_2^2) + \frac{1}{16 + 9l_2} \cdot l_2^2 - \frac{2}{25 + 9l_2} \cdot (1 + 2l_2 + l_2^2)$ (1.13.9)

Jednačina (1.13.9) se ne može jednostavno rešiti analitički pa se mora primeniti neka od iterativnih metoda ili grafički tako što će se nacrtati kriva $k = k(l_2)$ na osnovu (1.13.8).

Usvajajući za l_2 vrednosti 0, 1, 2, 3, 4 (cm) izračuna se $k(l_2)$ i nacrtala kriva sa koje je za $k = 0,1$ nalazi l_2 .

l_2 (cm)	0	1	2	3	4
k	0,47	0,17	0,088	0,044	0,0125

Sa dijagrama se dobija $l_2 \approx 1,8$ cm.

c) Iz (1.13.6) $\Rightarrow N = \sqrt{\frac{(3d_0 + 9l_1 + 10h) \cdot L \cdot 10^8}{7,87d_0^2}} \approx 179$ zavojaka.

Površinska gustina zavojka je $N_0 = \frac{N}{l_1 \cdot h} = \frac{179}{1 \cdot 1} = 179 \frac{\text{zav.}}{\text{cm}^2}$.

Iz dodatka 1 sledi $d_s = d_s(N_0)$ se očitava prečnik žice $d_s = d_z \approx 0,70$ mm (interpolacijom). Dužina upotrebljene žice je $l_z = \Pi \cdot d_0 \cdot N = 2 \cdot \Pi \cdot 179 = 1120$ cm = 11,2 m.

Zadatak 1.16

Jedan višeslojni kalem koji ima $N = 500$ zavojaka, namotan je na kalemsko telo, zavojak do zavojka, i ima dužinu $l = 3$ cm. Visina namotaja je $h = 0,5$ cm, srednji prečnik $d_0 = 1$ cm. Za namotaj je upotrebljena Cu-žica prečnika $d_s = 0,20$ mm, sa izolacijom dva puta pamuk.

- Izračunati L ovog kalema, ne uzimajući u obzir debljinu izolacije, a po obrazcu za duže kalemove?
- Koliko procenata od L iznosi korekcija zbog izolacije?
- Koliko se dobija L upotrebom Weeler-ovog obrazca?

REŠENJE

Poznati su

$$N = 500 \text{ zavojaka}; l = 3 \text{ cm};$$

$$h = 0,5 \text{ cm}; d_0 = 1 \text{ cm};$$

Prema obrascu za dugačke višeslojne kalemove je

$$L = \left[1,256 \cdot \frac{\pi \cdot d_0^2 \cdot N^2}{4l} - \frac{0,627 \cdot d_0 \cdot h \cdot N^2}{l} \cdot (0,693 + k) \right] \cdot 10^{-8} \text{ [H]} \quad (1.14.1)$$

Pri čemu su dimenzije izražene u [cm].

Korekcionni sačinilac k je funkcija od $\frac{l}{h}$, $k = k\left(\frac{l}{h}\right)$ i očitava se iz tablice (Dodatak 5)

$$k\left(\frac{l}{h}\right) = k(6) = 0,2446 \text{ pa se dobija } L = 575 \text{ } \mu\text{H}.$$

b) Korekcija koja se vrši usled uticaja izolacije žice, na induktivnost, je data relacijom

$$\Delta L = 0,627 \cdot d_0 \cdot N \cdot \left(2,303 \cdot \log\left(\frac{D}{d}\right) + 0,155 \right) \cdot 10^8 \text{ [H]} \quad (1.14.2)$$

gde je D razdaljina između susednih žica a d prečnik žice bez izolacije. Stvarna induktivnost je $L' = L + \Delta L$.

Dobija se $\Delta L = 1,86 \text{ } \mu\text{H}$ odnosno $\frac{\Delta L}{L} \cdot 100 = 0,33 \%$.

c) Prema Weeler-ovom obrascu je

$$L = \frac{0,787 \cdot d_0 \cdot N^2}{3d_0 + 9l + 10h} = 561 \text{ } \mu\text{H} \quad (1.14.3)$$

Zadatak 1.17

Na istom cilindričnom kalemskom telu na kojem se nalazi jednoslojni kalem (krajevi A i B) od 40 zavoja, motanih jedan do drugog žicom prečnika $d_s = 0,5 \text{ mm}$, induktivnosti $L = 6,4 \cdot 10^{-6} \text{ H}$, namotano je u produžetku na isti način i sa istom žicom, ali u suprotnom smeru još 120 zavoja i izrađeni su izvodi C, D i E posle 40, 80 i 120 zavoja.

a) Koristeći obrazac po Weisu i Olendorf-u izračunati induktivnost L_{AC} , L_{AD} , L_{AE} , koeficijent sprege k i međusobne induktivnosti M između kalemova L_{AB} i kalemova L_{BC} , L_{BD} i L_{BE} , respektivno.

b) Rezultat dobijen za L_{AC} uporediti sa rezultatom koji se dobija prema Kammerloher-u. Koliko je relativno odstupanje?

REŠENJE

$$L = k_2 \cdot N_c^2 \cdot l^3 \quad (1.15.1)$$

gde je

$$l_{AB} = N_{AB} \cdot d_s = 40 \cdot 0,05 = 2 \text{ cm} \quad (1.15.2)$$

$$N_c = \frac{N_{AB}}{l_{AB}} = \frac{40}{2} = 20 \frac{\text{zav.}}{\text{cm}} \quad (1.15.3)$$

Znajući $L_{AB} = L = 6,4 \cdot 10^{-6} \text{ H}$ nalazi se

$$k_2 = \frac{L}{N_c^2 \cdot l^3} = \frac{6,4 \cdot 10^{-6}}{20^2 \cdot 2^3} = 2 \cdot 10^{-9} \left[\frac{\text{H}}{\text{cm}} \right] \quad (1.15.4)$$

Sa grafika (Dodatak 6) $k_2 = k_2 \left(\frac{l}{d_0} \right) \Rightarrow \frac{l}{d_0} = 2 \Rightarrow d_0 = 1 \text{ cm}$.

Pošto postoje svi podaci za kalem, koristeći obrazac po Weisu-u i Olendorf-u

$$L = L' \cdot \frac{l}{l_p} \quad (1.15.5)$$

gde je

$$L' = 1,256 \cdot \frac{N^2 \cdot \Pi \cdot d_0^2}{4l} \cdot 10^{-8} [\text{H}] = 0,98646 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot 10^{-8} [\text{H}] \quad (1.15.6)$$

$$\frac{l_p}{l} = 1 + 0,45 \cdot \frac{d_0}{l} - 0,005 \cdot \left(\frac{d_0}{l} \right)^2 \quad (1.15.7)$$

$$L_{BC} = L_{AB} = 6,4 \cdot 10^{-6} [\text{H}] \quad (1.15.8)$$

$$L_{BD} = 0,98646 \cdot \frac{N_{BD}^2}{l_{BD}} \cdot 10^{-8} \cdot \frac{l_{BD}}{l_{pBD}} = 0,98646 \cdot \frac{80^2}{4} \cdot 10^{-8} \cdot 0,899 = 14,19 \mu\text{H}$$

$$l_{BD} = 80 \cdot 0,05 = 4 \text{ cm}; \quad \frac{l_{pBD}}{l_{BD}} = 1,1121875; \quad \frac{l_{BD}}{l_{pBD}} = 0,899; \quad (1.15.9)$$

$$L_{BE} = 0,98646 \cdot \frac{120^2}{6^3} \cdot 10^{-8} \cdot 0,93 = 22,02 \mu\text{H}$$

$$l_{BE} = 120 \cdot 0,05 = 6 \text{ cm}; \quad \frac{l_{pBE}}{l_{BE}} = 1,07486; \quad \frac{l_{BE}}{l_{pBE}} = 0,93.$$

$$L_{AC} = L_{AB} + L_{BC} - 2M_1 \quad (1.15.10)$$

Medusobna induktivnost M je ista po veličini kao između L_{AB} i L_{BC} kada bi zavojci bili motani svi na istu stranu, samo bi tada ukupna induktivnost bila $L'_{AC} = L_{BD} = 14,19 \mu\text{H}$.

$$\text{Pa bi bilo } L'_{AC} = L_{AB} + L_{BD} + 2M_1 \Rightarrow M_1 = \frac{L'_{AC} - L_{AB} - L_{BD}}{2} = 0,695 \mu\text{H}.$$

$$L_{AC} = L_{AB} + L_{BC} - 2 \cdot 0,695 = 11,41 \mu\text{H}.$$

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{L_{AB} \cdot L_{BC}}} = 0,10859.$$

$$L_{AD} = L'_{AB} + L_{BD} - 2M_2.$$

$$M_2 = \frac{L_{AD} - L'_{AB} - L_{BD}}{2} = 0,72 \mu\text{H}.$$

$$L_{AD} = L_{BE} = 22,03 \mu\text{H}.$$

$$L_{AD} = 6,4 + 14,19 - 2M_2 = 19,15 \mu\text{H}.$$

$$k_2 = \frac{0,72}{\sqrt{6,4 \cdot 14,19}} = 0,0755.$$

$$L_{AE} = L_{AB} + L_{BE} - 2M_3.$$

$$M_3 = \frac{L_{AE} - L_{AB} - L_{BE}}{2} = \frac{29,888 - 6,4 - 22,02}{2} = 0,733 \mu\text{H},$$

gde je:

$$L'_{AE} = 0,98646 \cdot \frac{166^2}{8^3} \cdot 10^{-8} \cdot 0,9468 = 29,888 \mu\text{H};$$

$$\frac{l_{pAE}}{l_{AE}} = 1,05617; \quad \frac{l_{AE}}{l_{pAE}} = 0,9468.$$

$$L_{AE} = L_{AB} + L_{BE} - 2M_3$$

$$L_{AE} = 26,966 \mu\text{H}$$

$$k_3 = \frac{0,729}{\sqrt{6,4 \cdot 22,03}} = 0,06139.$$

Prema Kammerloher-u je $L'_{AC} = k_2 \cdot N_c^2 \cdot l^2 = 0,55 \cdot 10^{-9} \cdot 20^2 \cdot 4^3 = 14,08 \mu\text{H}$.

$$k_2 \left(\frac{l}{d_0} \right) = k_2 \left(\frac{4}{1} \right) = k_2 (4) = 0,55 \cdot 10^{-9} \left[\frac{\text{H}}{\text{cm}} \right],$$

$$N_c = 20 \frac{\text{zav.}}{\text{cm}}; \quad l = 4 \text{ cm}.$$

$$M_2 = \frac{L_{AC} - L_{AB} - L_{BC}}{2} = 0,64$$

$$L_{AC} = L_{AB} + L_{BC} - 2M = 11,52 \mu\text{H}.$$

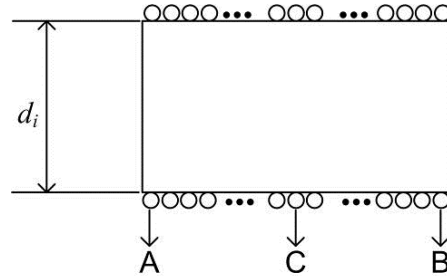
Odstupanje:

$$\frac{L_{AC} - L_{AC}^k}{L_{AC}} = \frac{11,41 - 11,52}{11,41} = -0,00964 = -0,964 \%$$

Zadatak 1.18

Kratak jednoslojni cilindrični kalem čije su dimenzije $l = 5$ cm i $d_i = 1,5$ cm, ima izvod u tački C, tako da je $N_{AC} = 30$ zavojaka, a $N_{BC} = 30$ zavojaka. Izračunati koeficijent međusobne induktivnosti M između delova A-C i C-B koristeći:

- a) Kamerloerov obrazac
b) Obrazac Weis i Ollendorf-a



REŠENJE

$$L_{AB} = L_{AC} + L_{CB} + 2M$$

$$M = \frac{1}{2} \cdot (L_{AB} - L_{AC} - L_{CB})$$

a) Koristeći obrazac za induktivnost po Kammerloher-u

$$L_{AB} = k_2 \cdot N_c^2 \cdot l_{AB}^3 = 8 \cdot 10^{-10} \cdot 225 \cdot 125 = 22,5 \mu\text{H},$$

gde je:

$$N_c = \frac{N}{l_{AB}} = \frac{75}{5} = 15 \frac{\text{zav.}}{\text{cm}} \Rightarrow N_c^2 = 225 \left(\frac{\text{zav.}}{\text{cm}} \right)^2,$$

$$\frac{L_{AB}}{d_0} = \frac{5}{1,5 + d_s} \approx \frac{5}{1,5} \approx 3,33 \Rightarrow k_2(3,3) = 8 \cdot 10^{-8} \left[\frac{\text{H}}{\text{cm}} \right].$$

$$L_{AC} = k_2 \left(\frac{l_{AC}}{d_0} \right) \cdot N_c^2 \cdot l_{AC}^3 = 4 \cdot 10^{-9} \cdot 225 \cdot 8 \cong 7,2 \mu\text{H},$$

gde je: $N_c = 15 \frac{\text{zav.}}{\text{cm}}$; $l_{AC} = 2$ cm; $\left(\frac{l_{CB}}{l} = \frac{N_{AC}}{N_{AB}} \Rightarrow l_{CB} = \frac{30}{75} \cdot 5 = 2 \text{ cm} \right)$

$$\frac{l}{d_0} = \frac{2}{1,5 + d_s} \approx \frac{2}{1,5} = 1,333 \Rightarrow k(1,333) \cong 4 \cdot 10^{-9} \left[\frac{\text{H}}{\text{cm}} \right].$$

$$L_{CB} = k_2 \left(\frac{l_{CB}}{d_0} \right) \cdot N_c^2 \cdot l_{CB}^3 = 2 \cdot 10^{-9} \cdot 225 \cdot 27 \cong 12,15 \approx 12,2 \mu\text{H},$$

gde je $N_c = 15 \frac{\text{zav.}}{\text{cm}}$; $l_{CB} = 3$ cm; $\frac{l_{CB}}{l} = \frac{N_{CB}}{N_{AB}} \Rightarrow l_{CB} = \frac{45}{75} \cdot 5 = 3 \text{ cm},$

$$k_2 \left(\frac{l_{CB}}{d_0} \right) = k_2 \left(\frac{3}{1,5 + d_s} \right) \cong k_2 \left(\frac{3}{1,5} \right) = k_2(2) \cong 2 \cdot 10^{-9} \left[\frac{\text{H}}{\text{cm}} \right].$$

Pa je definitivno $M = \frac{1}{2} \cdot (L_{AB} - L_{AC} - L_{CB}) = \frac{1}{2} \cdot (22,5 - 7,2 - 12,2) = 1,6 \mu\text{H}.$

b) Prema Weis-u i Ollendorf-u je

$$L = L' \cdot \frac{l}{l_p} = 1,256 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d_0^2 \cdot N^2}{l} \cdot \frac{1}{\frac{l_p}{l}} \cdot 10^{-8} [\text{H}] =$$

$$= 1,256 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d_0^2 \cdot N^2}{l} \cdot \frac{10^{-8}}{1 + 0,45 \cdot \left(\frac{d_0}{l} \right) - 0,005 \cdot \left(\frac{d_0}{l} \right)^2}$$

Pošto je: $d_0 = d_i + d_s \cong d_i = 1,5$ cm.

$$N_{AB} = 75 \text{ zav.}; N_{AC} = 30 \text{ zav.}; N_{CB} = 45 \text{ zav.};$$

$$l_{AB} = 5 \text{ cm}; l_{AC} = 2 \text{ cm}; l_{CB} = 3 \text{ cm};$$

$$L_{AB} = 1,256 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d_0^2 \cdot N_{AB}^2}{l_{AB}} \cdot \frac{10^{-8}}{1 + 0,045 \cdot \left(\frac{d_0}{l}\right) - 0,005 \cdot \left(\frac{d_0}{l_{AB}}\right)^2} = 22,0035 \mu\text{H} = 22 \mu\text{H}$$

$$L_{AC} = 1,256 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d_0^2 \cdot N_{AC}^2}{l_{AC}} \cdot \frac{10^{-8}}{1 + 0,045 \cdot \left(\frac{d_0}{l}\right) - 0,005 \cdot \left(\frac{d_0}{l_{AC}}\right)^2} \approx 7,48 \mu\text{H}$$

$$L_{CB} = 1,256 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d_0^2 \cdot N_{CB}^2}{l_{CB}} \cdot \frac{10^{-8}}{1 + 0,045 \cdot \left(\frac{d_0}{l}\right) - 0,005 \cdot \left(\frac{d_0}{l_{CB}}\right)^2} \approx 12,24 \mu\text{H}$$

$$M = \frac{L_{AB} - L_{AC} - L_{CB}}{2} = 1,14 \mu\text{H}.$$

Zadatak 1.19

Dva kratka višeslojna kalema A i B namotana su jedan iznad drugog na telo prečnika $D = 5 \text{ mm}$, žicom prečnika $0,2 \text{ mm}$, izolovanom emajlom i lakom $\left(N_0 = 13 \frac{\text{zav.}}{\text{mm}^2} \right)$.

Ako je kalem B za reakciju u oscilatoru i ako ima tri puta manje zavojaka od kalema A, a kalem A treba da ima induktivnost $L_A = 390 \mu\text{H}$, koristeći se Wheeler-ovim obrascem naći:

- Broj zavojaka kalema A - N_A
- Ukupan induktivnost L_{AB}
- Međusobnu induktivnost M kalemova A i B i
- Visinu namotaja oba kalema.

Poznato je da mašina za unakrsno motanje kalemova ima hod od 8 mm .

REŠENJE

Po Weeler-u je

$$L_A = \frac{0,0787 \cdot d_0^2 \cdot N^2}{3d_0 + 9l + 10h} [\mu\text{H}] = \frac{0,0787 \cdot (D+h)^2 \cdot N^2}{3 \cdot (D+h) + 9l + 10h} [\mu\text{H}]$$

gde je

$$h = \frac{N}{N_0 \cdot l} \text{ pa } \Rightarrow L_A = \frac{0,0787 \cdot \left(D + \frac{N}{N_0 \cdot l} \right)^2 \cdot N^2}{3 \cdot D + 9l + 13 \cdot \frac{N}{N_0 \cdot l}} = \frac{0,0787 \cdot \left(0,5 + \frac{N}{1040} \right)^2 \cdot N^2}{3 \cdot 0,5 + 9 \cdot 0,8 + 13 \cdot \frac{N}{1040}} [\mu\text{H}] .$$

Da bi našli N (pošto je to numerički dosta teško), usvajaćemo vrednosti za N i nalaziti odgovarajuće L i na osnovu toga nacrtaćemo krivu $L = f(N)$ sa koje približno možemo da očitamo N za dato L .

Dobija se:

N [zav.]	250	300	312	315	350
L [μH]	228,017	353,608	389,128	398,328	515,989

Sa grafika se očitava

$$N = 312 \text{ zav. } \Rightarrow h = \frac{N}{N_0 \cdot l} = 0,3 \text{ cm; } h = 0,3 \text{ cm.}$$

$$L_B = \frac{0,0787 \cdot (d_0^*)^2 \cdot N_B^2}{3d_0^* + 9l + 10 \cdot \frac{N_B}{N_0 \cdot l}} = \frac{0,0787 \cdot 1,2^2 \cdot 104^2}{3 \cdot 1,2 + 9 \cdot 0,8 + 10 \cdot \frac{104}{1040}} [\mu\text{H}]$$

gde je uzeto

$$d_0^* = D + 2h + h_1 = 0,5 + 0,6 + 0,1 = 1,2 \text{ cm}$$

$$L_B = 103,9776 \mu\text{H} .$$

Kako je : $L_{AB} = L_A + L_B + 2M$

$$M = \frac{L_{AB} - (L_A + L_B)}{2}$$

$$M = 155,68 \mu\text{H}$$

$$N_B = \frac{N_A}{3} = \frac{312}{3} = 104 \text{ zav. } N_B = 104 \text{ zav.}$$

$$h_A = \frac{N_A}{N_0 \cdot l} = \frac{312}{1040} = 0,3 \text{ cm} = 3 \text{ mm } h_A = 3 \text{ mm}$$

$$h_B = \frac{N_B}{N_0 \cdot l} = \frac{104}{1040} = 0,1 \text{ cm} = 1 \text{ mm } h_B = 1 \text{ mm}$$

$$L_{AB} = \frac{0,0787 \cdot d_0^2 \cdot N_{AB}^2}{3d_0' + 9l + 10 \cdot \frac{N_{AB}}{N_0 \cdot l} \cdot h_{AB}}$$

$$d_0 = D + h_A + h_B = 0,5 + 0,3 + 0,1 = 0,9 \text{ cm}$$

$$N_{AB} = N_A + N_B = 416 \text{ zav.}$$

$$N_0 \cdot l = 1040$$

$$l = 0,8$$

Pa sledi

$$L_{AB} = 305,2409 \mu\text{H}.$$

Zadatak 1.20

Na istom cilindričnom kalemskom telu na kojem se nalazi jednoslojni kalem od 18 zavoja namotan je u produžetku istom žicom prečnika $d_s = 0,5 \text{ mm}$, kao i prvi kalem, i na isti način – zavoja do zavoja, ali u suprotnom smeru, drugi kalem – B od 54 zavoja, koji ima 4,8 puta veću induktivnost od kalema A.

Izračunati induktivnost kalemova A i B, ukupnu induktivnost L_e , međusobnu induktivnost M i koeficijent međusobne sprege k ova dva kalema. Proračun izvršiti koristeći obrasce po Weis-Olandorf-u i Kammerloher-u i dobijene rezultate na ova dva načina uporediti.

REŠENJE

$$L_A = k_1 \left(\frac{l_A}{d_0} \right) \cdot N_c^2 \cdot d_0^3 = k_1 \left(\frac{l_A}{d_0} \right) \cdot \frac{d_0^3}{d_s^2} \quad (1.18.1)$$

$$L_B = k_1 \left(\frac{l_B}{d_0} \right) \cdot N_c^2 \cdot d_0^3 = k_1 \left(\frac{l_B}{d_0} \right) \cdot \frac{d_0^3}{d_s^2} \quad (1.18.2)$$

$$\frac{L_B}{L_A} = \frac{k_1 \left(\frac{l_A}{d_0} \right)}{k_1 \left(\frac{l_B}{d_0} \right)} = 4,8 \quad (1.18.3)$$

$$l_A = N_A \cdot d_s = 18 \cdot 0,05 = 0,9 \text{ cm}$$

$$l_B = N_B \cdot d_s = 54 \cdot 0,05 = 2,7 \text{ cm}$$

Da bi našli d_0 predpostavljamo nekoliko njegovih vrednosti, naći $\frac{l_A}{d_0}$ i $\frac{l_B}{d_0}$, odnosno $k_1 \left(\frac{l_A}{d_0} \right)$ i $k_1 \left(\frac{l_B}{d_0} \right)$

i sa dijagrama očitati za koje d_0 je zadovoljen uslov (1.18.3).

d_0 [cm]	1	2	3	4	5
$\frac{l_A}{d_0}$	0,9	0,45	0,30	0,225	0,15
$\frac{l_B}{d_0}$	2,70	1,35	0,90	0,675	0,45
$k_1 \left(\frac{l_A}{d_0} \right) \cdot 10^9$	5,8	2,3	1,20	0,75	0,38
$k_1 \left(\frac{l_B}{d_0} \right) \cdot 10^9$	23,0	9,8	5,80	3,7	2,3
$\frac{k_1 \left(\frac{l_A}{d_0} \right)}{k_1 \left(\frac{l_B}{d_0} \right)}$	3,9655	4,26	4,833	4,933	6,05

Prema tabeli (odnosno dijagramu koji može da se nacrtati) dobija se $d_0 \cong 3 \text{ cm}$.

$$L_A = k_1(0,3) \cdot \frac{d_0^3}{d_s^2} = 1,2 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{3^3}{0,05^2} = \frac{1,2 \cdot 27}{25} \cdot 10^{-5} = 12,96 \mu\text{H} \cong 13 \mu\text{H}$$

$$L_B = k_1(0,9) \cdot \frac{d_0^3}{d_s^2} = 5,78 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{3^3}{0,05^2} = \frac{5,78 \cdot 27}{25} \cdot 10^{-5} = 62,424 \mu\text{H} \cong 62,4 \mu\text{H}$$

$$L_e = L_A + L_B - 2M.$$

Kada bi kalemovi bili motani u istom smeru, bilo bi:

$$L'_e = L_A + L_B + 2M,$$

$$\text{gde je } L'_e = k_1 \left(\frac{l_A + l_B}{d_0} \right) \cdot \frac{d_0^3}{d_s^2} = k_1 \left(\frac{36}{3} \right) \cdot \frac{d_0^3}{d_s^2} = 8,4 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{3^3}{0,05^2} = 90,72 \mu\text{H}.$$

Iz (8), (6) i (7) \Rightarrow

$$M = \frac{1}{2} \cdot (L'_e - L_A - L_B) = 0,5 \cdot (90,72 - 13 - 62,4) = 7,66 \mu\text{H}$$

$$L_e = L_A + L_B - 2M = 60,08 \mu\text{H}.$$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_A \cdot L_B}} = \frac{7,66}{\sqrt{13 \cdot 62,4}} = 0,268945819.$$

Prema Weis-u i Olendorf-u je:

$$L = L' \cdot \frac{l}{l_p}, \text{ gde je } L' = 1,256 \cdot \frac{N^2 \cdot \Pi \cdot d_0^2}{4l} \cdot 10^{-8} [\text{H}]$$

$$\Rightarrow L_A = \mu_0 \cdot \frac{\Pi}{4} \cdot d_0^2 \cdot \frac{N_A^2}{l_A} \cdot \frac{1}{1 + 0,45 \cdot \left(\frac{d_0}{l_A} \right) - 0,005 \cdot \left(\frac{d_0}{l_A} \right)^2} = \mu_0 \cdot \frac{\Pi}{4} \cdot d_0^2 \cdot N_c^2 \cdot \frac{l_A}{l_p} \cdot l_A$$

$$L_B = \mu_0 \cdot \frac{\Pi}{4} \cdot d_0^2 \cdot \frac{N_B^2}{l_B} \cdot \frac{1}{1 + 0,45 \cdot \left(\frac{d_0}{l_B} \right) - 0,005 \cdot \left(\frac{d_0}{l_B} \right)^2} = \mu_0 \cdot \frac{\Pi}{4} \cdot d_0^2 \cdot N_c^2 \cdot \frac{l_B}{l_p} \cdot l_B$$

$$L'_e = \mu_0 \cdot \frac{\Pi}{4} \cdot d_0^2 \cdot \frac{(N_A + N_B)^2}{l_A + l_B} \cdot \frac{1}{1 + 0,45 \cdot \left(\frac{d_0}{l_A + l_B} \right) - 0,005 \cdot \left(\frac{d_0}{l_A + l_B} \right)^2} =$$

$$= \mu_0 \cdot \frac{\Pi}{4} \cdot d_0^2 \cdot N_c^2 \cdot \frac{l_A + l_B}{l_p} \cdot (l_A + l_B)$$

Iz relacija za L_A i L_B na osnovu uslova zadatka \Rightarrow

$$\frac{L_B}{L_A} = 4,8 = \frac{l_B}{l_A} \cdot \frac{1 + 0,45 \cdot \left(\frac{d_0}{l_A} \right) - 0,005 \cdot \left(\frac{d_0}{l_A} \right)^2}{1 + 0,45 \cdot \left(\frac{d_0}{l_B} \right) - 0,005 \cdot \left(\frac{d_0}{l_B} \right)^2}$$

$$1 + 0,45 \cdot \left(\frac{d_0}{l_A} \right) - 0,005 \cdot \left(\frac{d_0}{l_A} \right)^2 - 1,6 \cdot \left[1 + 0,45 \cdot \left(\frac{d_0}{l_B} \right) - 0,005 \cdot \left(\frac{d_0}{l_B} \right)^2 \right] = 0$$

$$5,075 \cdot \left(\frac{d_0}{l_A}\right) - 0,005 \cdot \left(\frac{d_0}{l_A}\right)^2 - 1,6 \cdot \left[1 + 0,45 \cdot \left(\frac{d_0}{l_B}\right) - 0,005 \cdot \left(\frac{d_0}{l_B}\right)^2\right] = 0$$

$$5,075 \cdot 10^{-3} d_0^2 - 0,233 d_0 + 0,6 = 0 \Rightarrow d_0 \approx 2,83 \text{ cm} .$$

Usvojicemo $d_0 = 3 \text{ cm}$ kako bi pravili poređenje dobijenih rezultata za L_A , L_B , L_e , M i k po različitim metodama kod kalema sa istim fizičkim parametrima (l , d_0 , N , d_s).

Iz navedenih relacija dobijaju se sledeći rezultati:

$$L_A = 13,070 \mu\text{H} ,$$

$$L_B = 64,285 \mu\text{H} ,$$

$$L_e = 93,199 \mu\text{H} ,$$

$$\text{gde je uzeto } d_0 = 3 \text{ cm}; N_c = 20 \frac{\text{zav.}}{\text{cm}} \text{ i } \mu_0 \cdot \frac{\Pi}{4} \cdot d_0^2 \cdot N_c^2 = 35,51256336 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{H}}{\text{cm}} \right] .$$

$$L'_e = L_A + L_B + 2M \Rightarrow$$

$$M = \frac{1}{2} \cdot (L'_e - L_A - L_B) = 7,922 \mu\text{H}$$

$$L_e = L_A + L_B - 2M = 61,511 \mu\text{H} .$$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_A \cdot L_B}} = 0,2733 .$$

Razlika u rezultatima II i I proračuna je:

$$L_A^{II} - L_A^I = 13,07 - 12,96 = 0,11 \mu\text{H}$$

$$L_B^{II} - L_B^I = 64,285 - 62,424 = 1,861 \mu\text{H}$$

$$L_e^{II} - L_e^I = 61,511 - 60,08 = 1,431 \mu\text{H}$$

$$M^{II} - M^I = 7,922 - 7,66 = 0,262 \mu\text{H}$$

$$k^{II} - k^I = 0,2733 - 0,2689 = 0,0084 .$$

2 Mrežni transformatori

Problematika konstruisanja transformatorskih tela optimizovanih za radnu frekvenciju od 50 Hz (ili 60 Hz) stara je koliko i problematika prenosa električne energije naizmjeničnom strujom. Mrežni transformatori sreću se u celom lancu proizvodnje i distribucije električne energije, ali i u raznim električnim i elektronskim uređajima široke potrošnje. Pre razvoja prekidačkih sistema za napajanje, mrežni transformatori su držali primat u važnom segmentu konstruisanja elektronskih uređaja-napajanja. Konverzija visokog napona na frekvenciji električne mreže u niski napon potreban za napajanje elektronskih uređaja bio je dominantna oblast primene ovakvih transformatora. Iako su značajno potisnuti razvojem prekidačkih napajanja, kada je potrebno konstruisati jednosmerni izvor napajanja visokih performansi, mrežni transformator ostaje element izbora.

Zadatak 2.1

Pri proračunu mrežnih transformatora na osnovu poznatih podataka treba proračunati ostale parametre (geometrijske i električne) i izvršiti proveru smeštaja i pregrevanja. Tako se na kraju proračuna poseduju svi podaci:

1. GEOMETRIJSKI PARAMETRI

- profil lima (oblik i dimenzije)
- debljina lima Δ
- broj limova n_e
- izolacija između limova f_e
- debljina paketa b
- broj navojaka N_1 i N_2 primara i sekundara
- dužina žice l_{z1} i l_{z2} primara i sekundara
- prečnik žice d_1 i d_2 primara i sekundara
- broj slojeva z_1 i z_2 primara i sekundara
- težina G_{Fe} i G_{Cu} upotrebljenog gvožđa i bakra.

2. ELEKTRIČNI PARAMETRI

- naponi U_1 i U_2 primara i sekundara
- struje I_1 i I_2 primara i sekundara
- snage P_1 i P_2 primara i sekundara
- snaga gubitka $P_{Cu} + P_{Fe}$ u bakru i gvožđu
- stepen korisnog dejstva μ
- struja praznog hoda I_0

3. PODACI PROVERE

- smeštaja navojka
- maksimalne temperature pregrevanja

1. Proračunati mrežni transformator (naći broj navojaka primara i sekundara N_1 i N_2 ; prečnik žice primara i sekundara d_{z1} i d_{z2} ; snagu gubitka u gvožđu i bakru i proveriti mogućnost smeštaja, ako je:

- napon primara $U_1 = 220 \text{ V}$,
- napon sekundara $U_2 = 40 \text{ V}$,
- struja sekundara $I_2 = 2 \text{ A}$,
- maksimalna indukcija $B_{\max} = 1,2 \text{ T}$,
- dozvoljeno pregrevanje $\Delta\Theta = 60^\circ\text{C}$.

Pri izradi transformatora korišćeni su dinamo limovi profila M debljine 0,35 mm, sa izolacijom od laka (za jezgro) i bakarna žica izolovana lakom (za namotaje).

REŠENJE

Pri proračunu mrežnih transformatora polazi se od snage sekundara

$$P_2 = U_2 \cdot I_2 = 40 \cdot 4 = 160 \text{ W} \quad (2.1.1)$$

Na osnovu snage P_2 određuje se efektivni poprečni presek jezgra

$$S_{eff} = k \cdot \sqrt{\frac{P_z}{f}} = 7 \cdot \sqrt{\frac{P_z}{f}} = 7 \cdot \sqrt{\frac{160}{50}} = 12,5 \text{ cm}^2 \quad (2.1.2)$$

a na osnovu S_{eff} se određuju

$$d_{max} = \sqrt{S_{eff}} = 35,2 \text{ mm} \quad (2.1.3)$$

$$d_{min} = 0,82 \cdot \sqrt{S_{eff}} = 29 \text{ mm} \quad (2.1.4)$$

(d_{min} se dobija iz uslova $b = 1,5 \cdot d$, a d_{max} iz uslova $b = d$).

Iz tablica (Dodatak 2) se nalaze dimenzije M lima za standardizovano d ($d_{min} \leq d \leq d_{max}$) i očitaju ostale dimenzije:

$$d = 34 \text{ mm} \quad a = 17 \text{ mm}$$

$$h = 102 \text{ mm} \quad l_e = 23,8 \text{ cm}$$

$$c = 68 \text{ mm} \quad f_e = 0,92$$

što odgovara limu M-102.

$$\text{Broj limova je } n_e = \frac{S_{eff}}{d \cdot \Delta} = \frac{12,5 \cdot 10}{3,4 \cdot 0,35} \approx 105.$$

Geometrijska debljina limenog paketa je

$$b = \frac{S_{eff}}{d \cdot f_e} = \frac{12,5}{3,4 \cdot 0,92} \approx 4 \text{ cm}.$$

Broj zavojava nalazimo po obrascu:

$$N_1 = \frac{U_1 \cdot 10^{-4}}{4,44 \cdot f \cdot S_{eff} \cdot B_{max}} = \frac{220 \cdot 10^{-4}}{4,44 \cdot 50 \cdot 12,5 \cdot 1,2} = 666 \cong 670 \text{ zavojava}.$$

$$N_1 \cong 670 \text{ zavojava}$$

$$\frac{U_1}{N_1} = \frac{U_1}{N_1} \cdot v_2 \Rightarrow N_2 = N_1 \cdot \frac{U_2}{U_1} \cdot v_2$$

$$v_2 = v_2(P_2) = v_2(160 \text{ W}) = 1,062 - \text{očita se sa dijagrama (Dodatak 16), pa} \Rightarrow$$

$$N_2 = 670 \cdot \frac{40}{220} \cdot 1,062 \cong 127 \text{ zavojava}.$$

$$N_2 \cong 127 \text{ zavojava}$$

$$\text{Prečnik žice dobijamo koristeći obrazac } d = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{I}{J}}.$$

Kako je stepen iskorišćenja $\eta = \frac{P_2}{U_1 \cdot I_1}$, i usvajajući $\eta = 0,9$ nalazimo struju primara

$$I_1 = \frac{P_2}{U_1 \cdot \eta} = \frac{160}{220 \cdot 0,9} \approx 0,81 \text{ A}.$$

$$I_1 = 0,81 \text{ A}$$

Dozvoljena gustina struje očitava se sa dijagrama (Dodatak 19) $Seff = f(J, \Delta\Theta) \Rightarrow J = f(Seff)_{\Delta\Theta=60^{\circ}C}$.

$$J = J(Seff)_{\Delta\Theta=60^{\circ}C} \approx 2,8 \frac{A}{mm^2},$$

$$J = 2,8 \frac{A}{mm^2}$$

$$\text{Pa} \Rightarrow d_1 = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{I_1}{J}} = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{0,81}{2,8}} \cong 0,608 \text{ mm}$$

$$d_2 = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{I_2}{J}} = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{4}{2,8}} \cong 1,35 \text{ mm}.$$

Usvajamo prvu veću vrednost prečnika žice koja je standardizovana i očitavamo odgovarajući prečnik izolovane žice d_s .

Biće:

$$d_1 = 0,70 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad d_{s1} = 0,74 \text{ mm}$$

$$d_1 = 1,5 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad d_{s2} = 1,56 \text{ mm}$$

Broj slojeva Z primarnih i sekundarnih navojaka dobijamo po obrascima

$$Z_s = k \cdot \frac{N}{N'} = k \cdot \frac{N}{\frac{l}{d_s}} = k \cdot \frac{N \cdot d_s}{l}, \quad Z_s = k \cdot \frac{N \cdot d_s}{l}$$

Gde je k korekcionni koeficijent zbog neujednačnosti motanja. Za idealno motanje je $k = 1$, za mašinsko je $k = 1,05$, a za ručno $k = 1,1$.

Za lim profila M-102 očitamo dimenzije kalemskog tela (Dodatak 2):

$$q = 65 \text{ mm}; g = 35 \text{ mm}; f = 37 \text{ mm}; l = 61 \text{ mm}; t = 71 \text{ mm}.$$

Pa imamo:

$$Z_1 = k \cdot \frac{N_1 \cdot d_{s1}}{l} = 1,05 \cdot \frac{670 \cdot 0,74}{10 \cdot 6,1} \cong 9.$$

$$Z_2 = k \cdot \frac{N_2 \cdot d_{s2}}{l} = 1,05 \cdot \frac{127 \cdot 1,36}{10 \cdot 6,1} \cong 4.$$

Odredićemo sada snagu gubitaka transformatora. Gubici u bakru su:

$$P_{Cu} = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2.$$

$$\text{Treba odrediti } R_1 \text{ i } R_2. \text{ To ćemo uraditi po obrascu } R = \rho \cdot \frac{l}{S} = \rho \cdot \frac{4 \cdot N \cdot l_m}{\Pi \cdot d^2}.$$

Pošto je ρ , l i S zavise od temperature, trebalo bi to uzeti u obzir. Pošto se radi o malim promenama temperature, promenu dužine žice i njenog prprečnog preseka možemo zanemariti. Zato ćemo odrediti otpornost bakarne žice na sobnoj temperaturi, jer je ρ dato za sobnu temperaturu, a onda znajući temperaturski sačinilac α_{Cu} nađemo otpornost na traženoj temperaturi.

$$\Rightarrow R_{01} = \frac{4 \cdot \rho_0}{\Pi} \cdot \frac{N_1 \cdot l_{m1}}{d_1^2} = 22 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{N_1 \cdot l_{m1}}{d_1^2}$$

$$R_{02} = \frac{4 \cdot \rho_0}{\Pi} \cdot \frac{N_1 \cdot l_{m1}}{d_1^2} = 22 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{N_1 \cdot l_{m1}}{d_1^2}$$

$$\text{gde je } \rho_0 = 0,0172787 \frac{\Omega mm^2}{m}.$$

Da bi našli R_{01} i R_{02} moramo odrediti l_{m1} i l_{m2} .

l_{m1} = dužina srednjeg navojka primara.

l_{m2} = dužina srednjeg navojka sekundara (prvog navoja).

l_{m3} = dužina srednjeg navojka sekundara (drugog navoja).

$$l_{m1} = 2 \cdot (b + d + 6s) + \frac{\pi}{2} \cdot h_n$$

$$l_{m2} = 2 \cdot (b + d + 6s) + \pi \cdot h_n$$

$$l_{m3} = 2 \cdot (b + d + 6s) + \frac{3\pi}{2} \cdot h_n$$

s = debljina kalemskog tela. Ova debljina se daje u funkciji snage P_2 (Dodatak 20).

$s = s(P_2) = s(160 \text{ W}) = 0,1 \text{ cm} = 1 \text{ mm}$ za bakelizovanu hartiju i za prešpan.

h_n = visina namotaja na kalemskom telu. h_n se određuje na osnovu širine prozora lima a . Vodeći računa o debljini kalemskog tela, visina je

$$h_n = a - 3s \text{ [cm]} \quad h_n = 1,7 - 3 \cdot 0,1 = 1,4 \text{ cm}.$$

Ako prozor a nije potpuno ispunjen, onda je

$$h_n = Z_1 \cdot d_{s1} + Z_2 \cdot d_{s2} = 9 \cdot 0,74 + 4 \cdot 1,56 \cong 1,29 \text{ cm}.$$

Pa imamo:

$$l_{m1} = 2 \cdot (4 + 3,4 + 6 \cdot 0,1) + \frac{3,14 \cdot 1,4}{2} \cong 18,2 \text{ cm} \quad l_{m1} = 18,2 \text{ cm}$$

Pošto imamo samo jedan sekundarni namotaj, onda njegov srednji navojak (dužina l_{m2}) odgovara l'_{m3} .

$$l'_{m3} = l_{m2} = 2 \cdot (b + d + 6s) + \frac{3\pi}{2} \cdot h_n$$

$$l_{m2} = 2 \cdot (4 + 3,4 + 6 \cdot 0,1) + 1,5 \cdot 3,14 \cdot 1,4 \cong 22,6 \text{ cm} \quad l_{m2} = 22,6 \text{ cm}.$$

Sada možemo naći otpornost:

$$R_{01} = 22 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{670 \cdot 18,2}{(0,7)^2} \cong 5,5 \Omega, \quad R_{01} \cong 5,5 \Omega$$

$$R_{02} = 22 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{127 \cdot 22,6 \text{ cm}}{(1,36 \text{ mm})^2} \cong 0,28 \Omega, \quad R_{02} \cong 0,28 \Omega$$

Kako je $R = R_0 \cdot (1 + \alpha \Delta \Theta)$

$$\alpha_{Cu|T=20^{\circ}C} = 3,92 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^{\circ}C} \Rightarrow$$

$$R_1 \cong 6,8 \Omega.$$

$$R_2 \cong 0,35 \Omega.$$

Konačno:

$$P_{Cu} = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 = 6,8 \cdot 0,81^2 + 0,35 \cdot 4^2 = 10,06 \text{ W} \quad P_{Cu} = 10,06 \text{ W}$$

Gubici u gvožđu izračunavaju se po obrascu

$$P_{Fe} = 1,25 \cdot I \cdot G_{Fe}$$

$$P_{Fe} = \left[\delta_0 \left(\frac{f}{100} \right)^2 + \Theta_0 \left(\frac{f}{100} \right)^2 \right] \cdot B_{\max}^2 \cdot G_{Fe} [W], B > 0,7T$$

gde su:

$$P_{Fe} = \Theta_0 \left(\frac{f}{100} \right) \cdot B_{\max}^{1,6} \cdot G_{Fe} [W], B < 0,7T$$

G_{Fe} - težina gvožđa, Γ - koeficijent gubitka u F_e , koji zavisi od indukcije B_{\max} i frekvencije i vrste lima.

Ovaj koeficijent se daje u tablici (Dodatak 10).

Za naš slučaj je :

$$\Gamma = 1,96 \frac{W}{kg}$$

$$G_{Fe} = \left[(b \cdot h^2) - 2 \cdot (a \cdot b \cdot c) \right] \cdot \gamma \cdot f_e$$

$a \cdot b \cdot c = V_1 =$ zaprmina prozora,

$\gamma =$ specifična težina F_e ,

$f_e =$ sačinilac ispunje,

$G_{Fe} \cong 2,35$ Kp.

Pa je $P_{Fe} = 1,25 \cdot 1,96 \cdot 2,35 \cong 6,3$ W.

Stepen iskorišćenja je :

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + P_{Fe} + P_{Cu}} = \frac{160}{160 + 16,36} = \frac{160}{176,36} \cong 0,907, \eta \cong 0,9$$

kao što je i usvojeno.

Dužina upotrebljene žice je :

$$l_1 = N_1 \cdot l_{m1} = 670 \cdot 18,2 = 120 \text{ m} \cdot l_1 = 120 \text{ m}$$

$$l_2 = N_2 \cdot l_{m2} = 127 \cdot 0,226 = 29 \text{ m} \cdot l_2 = 29 \text{ m}$$

Na kraju proveravamo smeštaj navojaka. Za ovaj slučaj Cu zahvata približno 45% preseka prozora, a 55% preseka otpada na izolaciju žica, međuizolaciju i prostor između žica. Površina poprečnog preseka bakarnih zavojaka je

$$S_{Cu} = N_1 \cdot \frac{\Pi \cdot d_1^2}{4} + N_2 \cdot \frac{\Pi \cdot d_2^2}{4} \cong 4,83 \text{ cm} \cdot S_{Cu} = 4,83 \text{ cm}$$

Površina prozora je

$$S_p = a \cdot c$$

Korisna površina prozora za smeštaj namotaja je

$$S_k = 0,45a \cdot c = 5,2 \text{ cm}^2, S_k = 5,2 \text{ cm}^2$$

kao što se vidi $S_k > S_{Cu}$.

Znači, navojci se mogu smestiti na izabrano kalemsko telo. Time je proračun transformatora završen. Radi korekcije faktora ν_2 određuje se ΔU , tj. Pad napona u sekundaru usled gubitka u bakru.

$$\Delta U = \frac{P_{Cu}}{I_2} = \frac{10,06}{4} = 2,515 \text{ V} \approx 2,52 \text{ V}$$

$$\nu_2 = \frac{U_2 + \Delta U}{U_2} = 1,063.$$

$$N_2 (\text{korigovano}) = N_2 \cdot \frac{\nu_2 (\text{ново})}{\nu_2 (\text{staro})} \cong 127,118 \text{ zavojaka} \approx 127 \text{ zavojaka}.$$

Iz izraza

$$J = k' \cdot \left[\frac{\Delta\Theta}{\left(1 + \frac{h}{3}\right) \cdot h} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\text{A}}{\text{mm}^2} \right]$$

određuje se pregrevanje i

$$\Delta\Theta = \frac{J^2}{k'^2} \cdot \left(1 + \frac{h}{3}\right) \cdot h = 62,77 \text{ } ^\circ\text{C} .$$

za $J = 2,8 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$; $h = 1,29 \text{ cm}$; $k' = 0,48$.

Zadatak 2.2

Izvršiti proračun mrežnog transformatora ($U_1 = 220 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$) sa dva sekundarna namotaja ako je $I_2 = 1 \text{ A}$, $U_2 = 40 \text{ V}$, $I_3 = 0,4 \text{ A}$ i $U_3 = 380 \text{ V}$. Koristeći dinamo limove E-I IV debljine $\Delta = 0,35 \text{ mm}$, sa izolacijom od laka. Uzeti da je $B_{\max} = 0,9 \text{ T}$, dozvoljeno pregrevanje. Pored proračuna broja zavojaka sva tri namotaja, prečnika žice, gubitaka u limovima i namotajima izvršiti i proveru: smeštaja namotaja, temperature pregrevanja u namotajima i izabranih vrednosti za koeficijente korisnog dejstva η i sekundarnog sačinioaca napona v_2 . Predložite mere za poboljšanje proračuna, ako je to potrebno.

REŠENJE

Pri proračunu mrežnog transformatora sa dva sekundarna namotaja polazi se od ukupne snage u sekundaru.

$$P_s = P_2 + P_3 = U_2 \cdot I_2 + U_3 \cdot I_3 = 40 \cdot 1 + 380 \cdot 0,4 = 192 \text{ W}$$

Na osnovu tako dobijene snage P_2 određuje se efektivni poprečni presek S_{eff} jezgra (Dodatak 17) bira se lim E-I 130, a na osnovu tog preseka d_{\max} i d_{\min} , odnosno d jezgra (širina jezgra).

$$S_{eff} = k \cdot \sqrt{\frac{P_s}{f}} = 7 \cdot \sqrt{\frac{192}{50}} = 13,717 \text{ cm}^2 \cong 13,7 \text{ cm}^2.$$

$$d_{\max} = \sqrt{S_{eff}} = 3,7 \text{ cm}.$$

$$d_{\min} = 0,82 \cdot d_{\max} = 3,04 \text{ cm}.$$

Prema tabeli (Dodatak 4) za dimenzije limova za već usvojeni lim E-I 130 se nalazi:

$$l = 130 \text{ mm}; m = i = 87,5 \text{ mm}; e = 17,5 \text{ mm}; f = 6,6 \text{ mm}; c = 70 \text{ mm};$$

$$d = 35 \text{ mm}; a = 30 \text{ mm}; h = 105 \text{ mm}; l = 115 \text{ mm}; r = 6 \text{ mm}; b = 35 \text{ mm}$$

Faktor ispunje jezgra sa $F_e - f_e = 0,92$ očitava se iz Dodatka 3.

$$b_{geom} = \frac{S_{eff}}{f_e \cdot d} = \frac{13,7}{0,92 \cdot 3,5} = 4,25$$

$$n_e = 10 \cdot \frac{S_{eff}}{d \cdot \Delta} = 10 \cdot \frac{13,7}{3,5 \cdot 0,35} \cong 112.$$

Težina gvožđa je

$$G_{Fe} = [h \cdot l - 2 \cdot a \cdot c] \cdot b \cdot f_e \cdot \gamma = [10,5 \cdot 13,0 - 2 \cdot 3 \cdot 7] \cdot 4,25 \cdot 0,92 \cdot 7,6 = 2808 \text{ p} = 2808 \text{ kp}$$

Broj zavojaka primara je:

$$N_1 = \frac{10^4 \cdot U_1}{4,44 \cdot f \cdot S_{eff} \cdot B_{\max}} = \frac{10^4 \cdot 220}{4,44 \cdot 50 \cdot 13,7 \cdot 0,9} = 803,7 \cong 804 \text{ zavojka}.$$

$$\frac{N_1}{U_1} = \frac{804}{220} = 3,654545454. \quad N_1 = 804 \text{ zavojaka}$$

Broj zavojaka u sekundarnim namotajima je:

$$N_2 = \frac{N_1}{U_1} \cdot U_2 \cdot v_2 = \frac{804}{220} \cdot 40 \cdot 1,06 = 154,55 \cong 155 \text{ zavojaka} \quad N_2 = 155 \text{ zavojaka}.$$

Usvajajući $\eta = 0,92 \Rightarrow$

$$I_1 = \frac{P_s}{\eta \cdot U_1} = \frac{192}{0,92 \cdot 220} = 0,9486 \text{ A} \cong 0,95 \text{ A}, \quad I_1 = 0,95 \text{ A}$$

Pa su prečnici žica namotaja:

$$d_{z1} = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{I_1}{J}} = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{0,95}{2,15}} \cong 0,75 \text{ mm}.$$

$$d_{z2} = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{I_2}{J}} = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{1}{2,15}} = 0,77977 \cong 0,78 \text{ mm}.$$

$$d_{z3} = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{I_3}{J}} = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{0,4}{2,15}} = 0,4874 \cong 0,49 \text{ mm}.$$

$$J = J(S_{eff}; \Delta\Theta) = J(13,7; 60) = 2,25 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}.$$

$$d_{z1} = 0,80 \text{ mm} \quad d_{s1} = 0,872 \text{ mm}$$

$$d_{z2} = 0,80 \text{ mm} \quad d_{s2} = 0,872 \text{ mm}$$

$$d_{z3} = 0,50 \text{ mm} \quad d_{s3} = 0,551 \text{ mm}$$

(d je prema dodatku 1 standardizovanih prečnika Cu žice sa i bez izolacije).

Otpornosti namotaja su:

$$R = \frac{4 \cdot \rho \cdot N \cdot l_m}{\Pi \cdot d_z^2}.$$

$$l_{m1} = 2 \cdot (d + b + 6 \cdot s) + \frac{\Pi}{2} \cdot h_n,$$

$$s = 0,1 \text{ cm za } P_s = 192 \text{ W}.$$

$$h_n = a - 3 \cdot s = 3,0 - 0,3 = 2,7 \text{ mm} = 2,7 \text{ cm}.$$

$$l_{m1} = 2 \cdot (3,5 + 4,25 + 0,60) + \frac{\Pi}{2} \cdot 2,7 = 2 \cdot 8,35 + \frac{\Pi}{2} \cdot 2,7 = 20,94 \text{ cm}.$$

$$l_{m2} = 2 \cdot (3,5 + 4,25 + 0,60) + \Pi \cdot 2,7 = 16,7 + \Pi \cdot 2,7 = 25,18 \text{ cm}.$$

$$l_{m3} = 2 \cdot (3,5 + 4,25 + 0,60) + \frac{3 \cdot \Pi}{2} \cdot 2,7 = 2 \cdot 8,35 + \frac{3 \cdot \Pi}{2} \cdot 2,7 = 29,42 \text{ cm}.$$

Kako je

$$\frac{4 \cdot \rho_0}{\Pi} = \frac{4}{\Pi} \cdot 0,0172 = 0,0218997 \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$\alpha \cdot \rho_{Cu} = 3,92 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^\circ\text{C}} \Rightarrow$$

$$\frac{4 \cdot \rho_\Theta}{\Pi} = \frac{4}{\Pi} \cdot \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \rho \cdot \Delta\Theta) = 0,0218997 \cdot (1 + 3,92 \cdot 10^{-3} \cdot 60) = 0,027 \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$\frac{4 \cdot \rho_\Theta}{\Pi} = 2,7 \Omega \text{cm},$$

Pa je

$$R_1 = 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{N_1 \cdot l_{m1}}{d_{z1}^2} = 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{804 \cdot 20,94}{0,08^2} = 7,2 \Omega.$$

$$R_2 = 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{155 \cdot 25,18}{0,08^2} \cong 1,37 \Omega.$$

$$R_3 = 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1472 \cdot 29,42}{0,05^2} = 46,77 \Omega.$$

$(l_m \text{ [cm]}; d \text{ [cm]}).$

$$P_{Cu} = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 = 6 + 1,37 + 6,55 = 14,97 \cong 15 \text{ W} . P_{Cu} = 15 \text{ W} .$$

$$P_{Fe} = \left[\sigma_v \cdot \left(\frac{f}{100} \right)^2 + \Theta \cdot \left(\frac{f}{100} \right) \right] \cdot B_{\max}^2 \cdot G_{Fe} = 1,38 \cdot 0,81 \cdot 2,802 \cong 3,14 \text{ W} . P_{Fe} = 3,14 \text{ W}$$

Provere:

$$\eta = \frac{P_s}{P_s + P_{Cu} + P_{Fe}} = \frac{192}{192 + 15 + 3,14} \cong 0,914 ,$$

a usvojili smo $\eta = 0,92$.

$$\Delta U_s = R_1 \cdot I_1 \cdot \frac{U_2}{U_1} + R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 \cdot \frac{U_2}{U_3} = 1,23 + 1,37 + 1,97 = 4,57 \text{ V} .$$

$$v_2 = \frac{U_2 + \Delta U_s}{U_2} = 1 + \frac{\Delta U_s}{U_2} = 1 + \frac{4,57}{220} = 1,02 ,$$

a usvojili smo $v = 1,06$.

$$S_p = a \cdot c = 3 \cdot 7 = 21 \text{ cm}^2 .$$

$$S_{Cu} = N_1 \cdot \frac{d_{z1}^2 \cdot \Pi}{4} + N_2 \cdot \frac{d_{z2}^2 \cdot \Pi}{4} + N_3 \cdot \frac{d_{z3}^2 \cdot \Pi}{4} = 4,04 + 0,78 + 2,89 = 7,71$$

$$S_{korisno} = 0,45 \cdot S_p = 9,45 .$$

Kako je $S_{korisno} > S_{Cu} \Rightarrow$ Namotaji mogu da se smeste.

$$\text{Iz izraza } J = k \cdot \left[\frac{\Delta \Theta}{\left(1 + \frac{h}{3}\right) \cdot h} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\text{A}}{\text{mm}^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Delta \Theta = \frac{J^2 \cdot h \cdot \left(1 + \frac{h}{3}\right)}{k} = \frac{2,15^2 \cdot 2,7 \cdot (1 + 0,9)}{0,48} = 49,4 \text{ } ^\circ\text{C}$$

za $k = 0,48$, a radili smo sa $\Delta \Theta = 60 \text{ } ^\circ\text{C}$, što je ispravno.

Zadatak 2.3

Izložiti princip proračuna mrežnog transformatora:

- Koje su polazne veličine date?
- Koje se veličine usvajaju?
- Šta i kao treba odrediti (obraci se ne moraju znati napamet)?

Zadatak 2.4

Proračunati mrežni transformator (naći: broj navojaka primara i sekundara N_1 i N_2 ; prečnik žice primara i sekundara d_{z1} i d_{z2} ; snagu gubitaka u bakru i proveriti mogućnost smeštaja navojaka), koji služi za napajanje ispravljača preko kojeg se pune akumulatori, ako je:

- napon primara $U_1 = 220$ V

- napon sekundara $U_2 = 20$ V

- struja sekundara $I_2 = 10,5$ A

- maksimalna indukcija $B_{\max} = 1,4$ T .

Pri izradi transformatora korišćena su trakasta rasklopna jezgra E-E debljine 0,35 mm (po traci) i ,bakarna žica izolovana lakom. Dozvoljeno je 60°C .

REŠENJE

Snaga sekundara je

$$P_2 = U_2 \cdot I_2 = 20 \cdot 10,5 = 210 \text{ W}$$

Iz tablice (Dodatak 12) se očitavaju dimenzije limova:

$$S_{\text{eff}} = 8,8 \text{ cm}^2$$

$$b = 40 \text{ mm}$$

$$d = 25 \text{ mm}$$

$$c = 62,5 \text{ mm}$$

$$a = 25 \text{ mm}$$

$$l = 100 \text{ mm}$$

$$a = 25 \text{ mm} .$$

Broj navojaka primara i sekundara je:

$$N_1 = \frac{U_1 \cdot 10^4}{4,44 \cdot f \cdot S_{\text{eff}} \cdot B_{\max}} = \frac{220 \cdot 10^4}{4,44 \cdot 50 \cdot 8,8 \cdot 1,4} \approx 804 \text{ zav.}$$

$$\frac{U_1}{N_1} = \frac{U_2}{N_2} \cdot v_2 \Rightarrow N_2 = N_1 \cdot \frac{U_2}{U_1} \cdot v_2 \approx 77 \text{ zav.}$$

v_2 - je očitano sa dijagrama (Dodatak 16)

$$v_2 = v_2(P_2) = v_2(210 \text{ W}) = 1,055 .$$

Prečnici žice primarnih i sekundarnih namotaja su:

$$d_{z1} = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{I_1}{J}} = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{1,06}{2,44}} \approx 0,74479 \approx 0,74 \text{ mm}$$

$$d_{z2} = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{I_2}{J}} \approx 2,344 \text{ mm}$$

Standardizovane vrednosti (iz Dodatka 1) su:

$$d_1 = 0,75 \text{ mm}, \quad d_{1s} = 0,80 \text{ mm}$$

$$d_2 = 2,5 \text{ mm}, \quad d_{2s} = 2,75 \text{ mm}$$

Dozvoljena gustina struje J očitana je sa dijagrama (Dodatak 19) $S_{\text{eff}} = f(J, \Delta\Theta)$.

$$J = J(S_{\text{eff}})_{\Delta\Theta=60^{\circ}\text{C}} = 2,44 \frac{\text{A}}{\text{mm}}$$

Struja primara je određena iz izraza za stepen korisnog dejstva η

$$\eta = \frac{P_2}{U_1 \cdot I_1} = \frac{U_2 \cdot I_2}{U_1 \cdot I_1},$$

gde je usvojeno, $\eta = \eta(P_2) = 0,9$,

$$I_1 = \frac{U_2 \cdot I_2}{\eta \cdot U_1} \cong 1,06 \text{ A}.$$

Na osnovu izračunatih I_1 , I_2 ;

$$R_1 = \rho \cdot \frac{l_1}{S_1} = \rho \cdot \frac{4 \cdot N_1 \cdot l_{m1}}{\pi \cdot d_1^2},$$

$$R_2 = \rho \cdot \frac{l_2}{S_2} = \rho \cdot \frac{4 \cdot N_2 \cdot l_{m2}}{\pi \cdot d_2^2}$$

gde je

$$\rho = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\Theta) = 0,0175 \cdot (1 + 0,0460) = 0,0217 \frac{\Omega\text{mm}^2}{\text{m}}$$

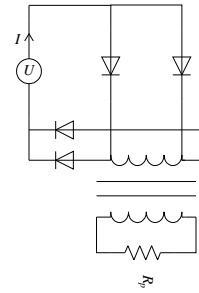
a l_{m1} i l_{m2} se određuju kao u zadatku 2.1, nalazi se

$$P_{Cu} = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2.$$

Provera smeštaja i ostalih elemenata kao i u prvom zadatku iz ove oblasti.

Zadatak 2.5

Za usmeračko kolo prikazano na slici poznate su srednje vrednosti napona i struje $U_0 = 20 \text{ V}$ i $I_0 = 400 \text{ mA}$. Smatrajući da su diode usmerača idealni elementi izvesti:



a) Izraz za snagu na osnovu koje se dimenzioniše presek jezgra transformatora P_2 i izraz za struju na osnovu koje se dimenzioniše presek žice namotaja transformatora I_2 .

b) Koristeći se rezultatima pod a) proračunati transformator (naći N_1, N_2, d_1, d_2)

usvajajući da je $B_{\max} = 1 \text{ T}$, gustina struje u namotajima $J = 2,5 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$ i dinamo

limove tipa E-I za jezgro.

Za proračunati transformator proveriti mogućnost smeštaja namotaja.

REŠENJE

Po definiciji efektivna vrednost struje je :

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_m^2 \cdot \sin^2(\omega t) \cdot d(\omega t)} \quad (2.5.1)$$

Srednja vrednost struje je:

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\int_0^{\pi} I_{\max} \cdot \sin(\omega t) \cdot d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} I_{\max} \cdot \sin(\omega t) \cdot d(\omega t) \right] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} I_{\max} \cdot \sin(\omega t) \cdot d(\omega t) \quad (2.5.2)$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} I_m^2 \cdot \sin^2(\omega t) \cdot d(\omega t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} I_m^2 \cdot \sin^2(\omega t) \cdot d(\omega t)} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} I_m^2 \cdot \sin^2(\omega t) \cdot d(\omega t)} = \quad (2.5.3)$$

$$= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{I_m}{2}$$

$$U_2 = \frac{U_{2m}}{\sqrt{2}} \quad (2.5.4)$$

Srednje vrednosti struje i napona su:

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\int_0^{\pi} I_{\max} \cdot \sin(\omega t) \cdot d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} I_{\max} \cdot \sin(\omega t) \cdot d(\omega t) \right] = \frac{I_m}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin(\omega t) \cdot d(\omega t) = \frac{2 \cdot I_m}{\pi} \quad (2.5.5)$$

$$I_0 = \frac{2 \cdot I_m}{\pi} = \frac{4 \cdot I_2}{\pi} \Rightarrow I_2 = \frac{\pi}{4} \cdot I_0 = 0,392699 \quad (2.5.6)$$

Analogno

$$U_0 = \frac{2 \cdot U_{2m}}{\pi} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot U_2}{\pi} \Rightarrow U_2 = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot U_0}{4} = 13,32864882 \quad (2.5.7)$$

b) $P_2 = 2 \cdot U_2 \cdot I_2$ za proračun jezgra

$$P_2 = 2 \cdot U_2 \cdot I_2 = 2 \cdot \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m \cdot I_m}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot U_0 \cdot \pi \cdot I_0}{4 \cdot 4} = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi^2 \cdot U_0 \cdot I_0}{8} \quad (2.5.8)$$

$$P_2 = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi^2}{8} \cdot P_0 = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi^2}{8} \cdot 12 \cdot 0,5 = \sqrt{2} \cdot 7,402203300 = 10,4682963 \approx 10,5 \text{ W.}$$

$$P_2 = 10,5 \text{ VA}$$

$$S_{eff} = 3,2029 \text{ cm}^2$$

$$N_1 = 3094 \text{ zavojaka} \quad N_2 = 469 \text{ zavojaka}$$

$$d_{z1} = 0,1863 \text{ mm} \quad d_{z2} = 0,505 \text{ mm}$$

$$I_1 = 67,974 \text{ mA} .$$

Zadatak 2.6

Izvesti obrasce za ekvivalentni otpor gubitaka R_g sveden na sekundar, u zavisnosti od otpornosti R_1 i R_2 i

broja zavojava N_1 i N_2 primara i sekundara:

- za autotransformator za redukciju napona;
- za autotransformator za povišenje napona;
- navesti prednosti i nedostatke autotransformatora u odnosu na obične transformatore.

REŠENJE

a)

$$P_{Cu} = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2$$

$$\frac{I_1}{I} = \frac{N_2}{N_1 - N_2}$$

$$I_2 = I_1 + I$$

$$I = I_2 \cdot \left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right)$$

$$I_1 = I_2 \cdot \frac{N_2}{N_1}$$

$$P_{Cu} = I_2^2 \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot \left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right)^2 \cdot R_2 \equiv R_g \cdot I_2^2$$

$$R_g = \frac{R_1 \cdot N_2^2 + R_2 \cdot (N_1 - N_2)^2}{N_1^2}$$

b)

$$P_{Cu} = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 = R_g' \cdot I_2^2$$

$$\frac{I}{I_2} = \frac{N_2 - N_1}{N_1}$$

$$I = I_2 \cdot \left(\frac{N_2}{N_1} - 1\right)$$

$$R_g' = \frac{R_2 \cdot N_1^2 + R_1 \cdot (N_2 - N_1)^2}{N_1^2}$$

Zadatak 2.7

Sekundar mrežnog transformatora broja zavojaka N_2 je opterećen jednosmernim usmeračem, tako da kroz njegove zavojke protiče i jednosmerna struja I_0 . Ako je transformator idealan i efektivna vrednost struje je I_2 , kolika je efektivna vrednost I_1 struje primara (koji ima N_1 zavojaka)?

Da li je I_1 veće ili manje od $n \cdot I_2$ $\left(n = \frac{N_2}{N_1} \right)$?

REŠENJE

$$I_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i_2(t) \cdot dt$$

$$i_2(t) = i_2'(t) + I_0$$

$$\int_0^T i_2'(t) \cdot dt = 0; \left(n = \frac{N_2}{N_1} \right).$$

Na primarnu stranu transformatora “prenosi” se samo

$$i_2 = i_1 \cdot \frac{N_1}{N_2} = i_1 \cdot \frac{1}{n},$$

tako da je

$$\int_0^T i_1(t) \cdot dt = \int_0^T i_2'(t) \cdot n \cdot dt = 0$$

$$I_2^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i_2^2(t) \cdot dt$$

$$I_1^2 = \frac{n^2}{T} \cdot \int_0^T i_2^2(t) \cdot dt = \frac{n^2}{T} \cdot \int_0^T (i_2(t) - I_0)^2 \cdot dt = \frac{n^2}{T} \cdot \int_0^T (i_2^2 - 2i_2 \cdot I_0 + I_0^2) \cdot dt$$

$$I_1^2 = n^2 \cdot (I_2^2 - 2I_2 \cdot I_0 + I_0^2)$$

$$I_1 = n \cdot I_2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{I_0}{I_2} \right)^2}$$

$$I_1 < n \cdot I_2.$$

3 Niskofrekventni transformatori

Niskofrekventni transformatori nalaze primenu u prenosu signala iz audio opsega pri čemu je njihova glavna uloga transformacija amplitude signala. Kako je frekvencijski opseg audio signala ograničen na opseg koji čuje čovek, spektralna karakteristika ovakvih transformatora je manje zahtevna za projektovanje od impulsnih varijanti. Unutar ovog opsega zahteva se maksimalno ravna amplitudska karakteristika i linearna fazna karakteristika kako bi vernost reprodukcije zvuka bila dobra. Pošto nalaze primenu i u skretnicama u pasivnim zvučnicima od ovakvih transformatora se zahteva i adekvatan prenos signala velike snage (reda 100 W) što nameće i proračun disipacije i gubitaka u jezgru.

Zadatak 3.1

Polazeći od ekvivalentne šeme neidealnog transformatora izvesti izraze za slabljenje $b = 20 \cdot \log \left| \frac{U'}{U''} \right|$

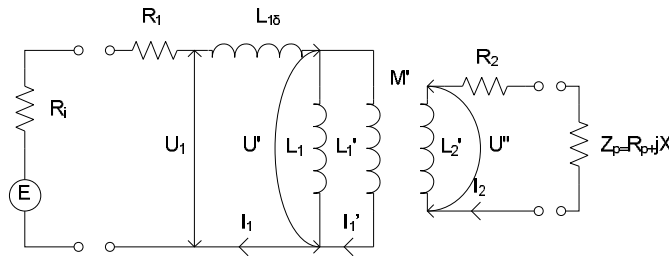
(dajući i odgovarajuće ekvivalentne šeme):

- a) opterećenost transformatora pri niskim učestanostima,
- b) opterećenost transformatora pri visokim učestanostima,

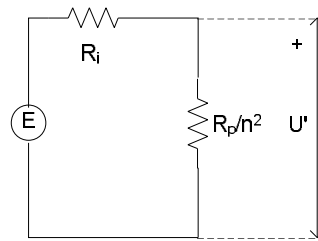
Na osnovu izraza pod a) izvesti izraz za proračun induktivnosti primara transformatora.

REŠENJE

Ekvivalentna (asimetrična) šema neidealnog transformatora je:



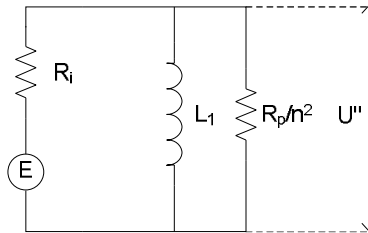
Ekvivalentna šema idealnog transformatora je



Slabljenje se definiše kao: $b = 20 \cdot \log \left| \frac{U'}{U''} \right|$

$$U' = \frac{\bar{E} \cdot R_p}{n^2 \cdot R_i + R_p}; \tag{3.1.1}$$

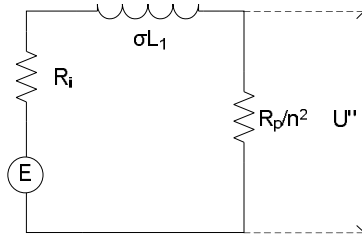
a) Pri niskim učestanostima ekvivalentna šema opterećenog transformatora je:



Pa je slabljenje na niskim učestanostima:

$$b_1 = 20 \cdot \log \sqrt{1 + \left[\frac{\frac{R_i \cdot R_p}{n^2}}{\left(R_i + \frac{R_p}{n^2} \right) \cdot \omega_{\min} \cdot L_1} \right]^2} \tag{3.1.2}$$

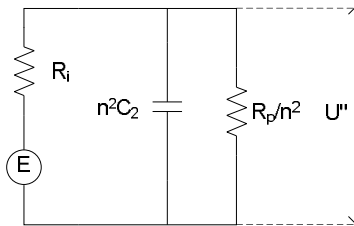
b) Pri visokim učestanostima ekvivalentna šema opterećenog transformatora je:



$$U'' = \frac{E \cdot \frac{R_p}{n^2}}{R_i + \frac{R_p}{n^2} + j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot L_1} \quad (3.1.3)$$

$$b_2 = 20 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{\max} \cdot \sigma \cdot L_1}{R_i + \frac{R_p}{n^2}} \right)^2} \quad (3.1.4)$$

Nekada se upotrebljava i sledeća ekvivalentna šema pri visokim učestanostima (kada je značajan uticaj sopstvene kapacitivnosti):



$$U'' = \frac{\frac{R_p}{n^2} \cdot \frac{1}{j \cdot \omega_n^2 \cdot C_2} \cdot E}{\frac{R_p}{n^2} + \frac{1}{j \cdot \omega_n^2 \cdot C_2} + R_i} \quad (3.1.5)$$

$$b_2 = 20 \cdot \log \left[1 + \left(\frac{R_i \cdot \omega_{\max} \cdot n^2 \cdot C_2}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.6)$$

c) Na osnovu b_1 ima se

$$L_1 = \frac{R_i \cdot \frac{R_p}{n^2}}{\omega_{\min} \cdot \left(R_i + \frac{R_p}{n^2} \right) \cdot \sqrt{e^{0,23 \cdot b_1} - 1}} \quad (3.1.7)$$

Zadatak 3.2

Za neopterećeni mikrofonski ulazni transformator, poznato je $R_i = 200 \Omega$, $f_{\min} = 50 \text{ Hz}$, $f_{\max} = 6 \text{ kHz}$, $C_s = 200 \text{ pF}$. Proračunati za ovaj transformator: L_1 , N_1 , N_2 , d_1 , d_2 , ako je za jezgro upotrebljen dinamo lim IV M-55 debljine 0,35 sa izolacijom od hartije debljine $h = 30 \mu\text{m}$; $b = 20 \text{ mm}$ i $\mu = 250$.

REŠENJE

$$L_1 = \frac{R_i}{2 \cdot \Pi \cdot f_{\min}} = \frac{200}{2 \cdot \Pi \cdot 50} = 0,6366 \text{ H} \quad (3.2.1)$$

dobija se iz

$$L_1 = \frac{R_i \cdot \frac{R_p}{n^2}}{\omega_{\min} \left(R_i + \frac{R_p}{n^2} \right) \cdot \sqrt{e^{0,23 \cdot b_1} - 1}} \quad (3.2.2)$$

$$L_1 = 1,256 \cdot \mu \cdot \frac{S_{\text{eff}} [\text{cm}^2]}{l_e [\text{cm}]} \cdot N_1^2 \cdot 10^{-8} [\text{H}] \quad (3.2.3)$$

$$\delta' = \frac{l_e}{\mu} \quad (3.2.4)$$

Prema tablici (Dodatak 2) za dati lim ($b = 20$, $d = 17$, $f_e = 0,91$)

$$\Rightarrow S_{\text{eff}} = 3,2 \text{ cm}^2; \quad l_e = 13,1 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow N_1 = 8922 \cdot \sqrt{\frac{L_1 \cdot l_e}{\mu_M \cdot S_{\text{eff}}}} \cong 911 \text{ zavoja}$$

$$n^2 = \frac{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{0,115 \cdot b_2}}{\omega_{\max} \cdot C_2 \cdot R_i} = \frac{1,4 \cdot \sqrt{0,115 \cdot b_2}}{2 \cdot \Pi \cdot f_{\max} \cdot C_2 \cdot R_i} \quad (3.2.5)$$

$$b_2' = 20 \cdot \log \left[1 + \left(\frac{R_i \cdot \omega_{\max} \cdot n^2 \cdot C_2}{2} \right)^2 \right] \quad (3.2.6)$$

$$n^2 \cdot R_i \cdot C_x \cdot \omega_{\max} = 1,41 \cdot \sqrt{e^{0,23 \cdot b_2} - 1} \quad (3.2.7)$$

Uzimajući $b_2 = 3 \text{ db}$ $\Rightarrow N_2 = \frac{N_1}{\sqrt{2 \cdot \Pi \cdot f_{\max} \cdot C_i \cdot R_i}} = 7419 \text{ zavoja}$ jer je $n = \frac{N_2}{N_1}$.

Prečnik žice se dobija po obrascu $d_1 \geq 0,03 \cdot \sqrt{\frac{N_1 \cdot l_{m1}}{R_i}} = 0,614 \text{ mm}$, koji se dobija iz uslova

$$R_1 = \rho_1 \cdot \frac{N_1 \cdot l_m}{\Pi \cdot d_1^2} < 0,25 \cdot R_i \quad (3.2.8)$$

Na osnovu prenosnog odnosa određuje se i d_2 ($l_{m1} = 11,3 \text{ cm}$; $d_1 > 0,614 \text{ mm}$ usvaja se standardizovana vrednost sa izolacijom).

Zadatak 3.3

Za dati izlazni transformator poznato je:

$$R_i = \frac{R_p^2}{n^2} = 10 \text{ k}\Omega, \quad N_1 = 3000 \text{ zavojava}, \quad N_2 = 300 \text{ zavojava},$$

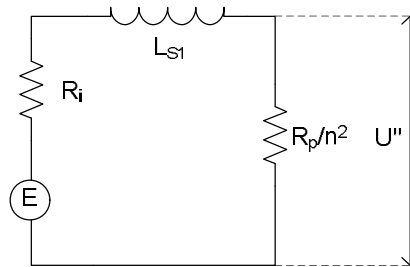
$$L_{s1} = 0,1 \text{ H} \text{ i } C_2 = 400 \text{ pF}.$$

Sekundarni namotaj transformatora namotan je preko primarnog namotaja.

- Izvesti izraz za gornje granične učestanosti koje odgovaraju slabljenju od 3 dB, posmatrajući posebno uticaj rasipne induktivnosti (L_{s1}), a posebno sekundarne kapacitivnosti transformatora (C_2),
- Za navedene brojne vrednosti izračunati ove učestanosti. Šta bi trebalo uraditi pri realizaciji datog transformatora da bi se gornja granična učestanost povećala?

REŠENJE

a) Kada je uzeto u obzir L_{s1}



$$U'' = \frac{\bar{E} \cdot \frac{R_p}{n^2}}{R_i + \frac{R_p}{n^2} + j \cdot \omega \cdot L_{s1}} \left\{ \begin{array}{l} \bar{U} = \frac{\bar{E} \cdot R_p}{n^2 \cdot R_i + R_p} \\ \text{Ovo je za idealan transformator.} \end{array} \right. \quad (3.3.1)$$

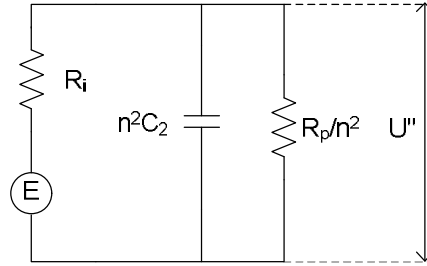
$$b = 20 \cdot \log \left| \frac{U'}{U''} \right| = 20 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega \cdot L_{s1}}{R_i + \frac{R_p}{n^2}} \right)^2} \quad (3.3.2)$$

odnosno za $\omega = \omega_{\max}$ je

$$b = 20 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega \cdot L_{s1}}{R_i + \frac{R_p}{n^2}} \right)^2} \quad (3.3.3)$$

$$f_{\max} = \frac{R_i + \frac{R_p}{n^2}}{2 \cdot \pi \cdot L_{s1}} \cdot \sqrt{e^{0,23 \cdot b} - 1} = \frac{R_i + \frac{R_p}{n^2}}{2 \cdot \pi \cdot L_{s1}} \cdot \sqrt{e^{0,69} - 1} \quad (3.3.4)$$

Kada je uzeto u obzir C_2



$$b' = 20 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{R_i \cdot \omega'_{\max} \cdot n^2 \cdot C_2}{2} \right)^2} \Rightarrow f'_{\max} = \frac{\sqrt{e^{0,23 \cdot b} - 1}}{n^2 \cdot C_2 \cdot R_i \cdot \Pi} = \frac{\sqrt{e^{0,69} - 1}}{n^2 \cdot C_2 \cdot R_i \cdot \Pi} \quad (3.3.5)$$

$$f'_{\max} = \frac{(10^4 + 10^4) \cdot \sqrt{e^{0,69} - 1}}{2 \cdot \Pi \cdot L_{s1}} = 2 \cdot 0,158645 \cdot 10^5 \text{ Hz} = 317308 \text{ Hz} = 317,3 \text{ kHz} \quad (3.3.6)$$

$$f'_{\max} = \frac{\sqrt{e^{0,69} - 1}}{\Pi \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-10} \cdot 10^4} = \frac{\sqrt{e^{0,69} - 1}}{4 \cdot \Pi} \cdot 10^8 \cong 158,654 \text{ kHz} . \quad (3.3.7)$$

Da bi se smanjile vrednosti C_2 i L_{s1} tj. Da bi se povećalo f'_{\max} treba smanjiti rasipanje pogodnim izborom jezgra kao i načina motanja, izborom prečnika žice i koraka motanja.

Zadatak 3.4

Za dati izlazni transformator poznato je:

$$R_i = \frac{R_p}{n^2} = 10 \text{ k}, N_1 = 3000 \text{ zav.}, N_2 = 300 \text{ zav.}, L_{s1} = 10 \text{ mH i } n^2 \cdot C_2 = 200 \text{ pF}.$$

Sekundarni namotaj transformatora namotan je preko primarnog namotaja.

a) Izvesti izraze za gornje granične učestanosti koje odgovaraju slabljenju od 3dB posmatrajući posebno uticaj rasipne induktivnosti (L_{s1}), a posebno sekundarne kapacitivnosti transformatora (C_2).

b) Za navedene brojne vrednosti izračunati ove učestanosti. Šta bi trebalo uraditi pri realizaciji datog transformatora da bi se gornja granična učestanost povećala?

REŠENJE

a) Kao u prethodnom zadatku.

b)

$$f_{\max} = \frac{(10^4 + 10^4) \cdot \sqrt{e^{0,69} - 1}}{2 \cdot \Pi \cdot L_{s1}} = 3173,08 \text{ kHz} \quad (3.3.8)$$

$$f_{\max} = \frac{\sqrt{e^{0,69} - 1}}{10^2 \cdot 2 \cdot \Pi \cdot 10^{-10} \cdot 10^4} = 317,308 \text{ Hz} \quad (3.3.9)$$

Pošto je

$$C \cong \frac{\Pi \cdot d_0}{3,6 \cdot \operatorname{arcth} \frac{p}{d}} [\text{pF}] \quad (3.3.10)$$

pogodnim izborom p_1 i d_0 (za zadato d) može se uticati na C . Takođe se na C može uticati i načinom motanja.

Zadatak 3.5

Izvesti izraz za proračun prečnika bakarne žice primara kod niskofrekventnih transformatora, ako kroz primar ne teče struja magnećenja, a koji glasi

$$d_{z1} \geq 0,03 \cdot \sqrt{\frac{N_1 \cdot l_{m1}}{R_i}} \text{ [mm]} \text{ ako je } R_1 \leq \frac{R_i}{4}, \text{ gde su:}$$

N_1 - broj navojaka primara

l_{m1} [cm] - dužina srednjeg navojka kod primara,

R_i [Ω] - unutrašnja otpornost izvora,

R_1 [Ω] - otpornost navojaka primara.

REŠENJE

Da bi uticaj otpornosti navojaka primara R_1 na frekventnu karakteristiku niskofrekventnog transformatora bio što manji (što je poželjno) uzima se uslov

$$R_1 \leq \frac{R_i}{4} \Rightarrow R_1 = \rho \cdot \frac{N_1 \cdot l_{m1}}{\frac{\pi \cdot d_{z1}^2}{4}} \leq \frac{R_i}{4} \quad (3.4.1)$$

$$d_{z1}^2 \geq \frac{16}{\pi} \cdot \rho \cdot \frac{N_1 \cdot l_m}{R_i} \quad (3.4.2)$$

$$d_{z1} \geq 0,03 \cdot \sqrt{\frac{N_1 \cdot l_m}{R_i}} \text{ [mm]} \quad (3.4.3)$$

gde je uzeto

$$\rho_{Cu} = \frac{1}{57} \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} = \frac{10^{-2}}{57} \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \cdot l_{m1} \text{ [cm]}; R_i \text{ [\Omega]}.$$

Zadatak 3.6

Proračunati transformator (naći broj navojaka N_1 i N_2 , presek žice d_1 i d_2 primara i sekundara, induktivnost L_1 primara, debljinu procepa $p = \frac{\delta}{2}$ i S_{eff} jezgra) koji obezbeđuje prilagođenje po snazi potrošača izlaznom tranzistorskom stepenu sa zajedničkim emiterom pri sledećim uslovima:

- jednosmerna struja kolektora $I = 25 \text{ mA}$,
- amplituda naizmenične struje kolektora $I_{c \max} = 25 \text{ mA}$,
- dozvoljena gustina struje kolektora $J = 2,5 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$,
- minimalna frekvencija $f_{\min} = 50 \text{ Hz}$,
- otpornost potrošača $R_p = 15 \Omega$,
- korisna snaga $P_k = 75 \text{ mW}$,
- otpornost primara za jednosmernu struju je zanemarljiva,
- izlazna otpornost tranzistora $\frac{1}{h_{22e}}$ je vrlo velika,
- napon zasićenja tranzistora u odnosu na napon napajanja je zanemarljiv,
- faktor gubitka napona je $K_g = 1$,
- za jezgro uzeti 4% silicijumski lim tipa E/I-60.

Napomena: Smatrati da se sa zadovoljavajućom tačnosti može primeniti dijagram Hanna.

REŠENJE

$$P_k = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \Rightarrow U_{\max} = \frac{2P_k}{I_{cm}} = \frac{2 \cdot 75 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-3}} = 6 \text{ V} \quad (3.5.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P_k = 75 \text{ mW} \\ I_{cm} = 25 \text{ mA} \\ U_m = 6 \text{ V} \end{array} \right\} I_c = \frac{I_{cm}}{\sqrt{2}} = 17,625 \text{ mA} \quad (3.5.2)$$

$$R_c = \frac{U_c}{I_c} = \frac{U_{cm}}{I_{cm}} = \frac{6 \text{ V}}{25 \cdot 10^{-3} \text{ A}} = 240 \Omega. \quad (3.5.3)$$

$$N_1 = \frac{12,5 \cdot J \cdot S_p}{I} = \frac{12,5 \cdot 2,5 \cdot 3}{30,6 \cdot 10^{-3}} = 3061,86 \cong 3062 \text{ zav.}$$

$$I = \sqrt{25^2 + \frac{25^2}{2}} = \sqrt{\frac{1875}{2}} = 25 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = 30,618 \text{ mA}$$

$$S_p = a \cdot c = 1 \cdot 3 = 3 \text{ cm}^2$$

$$H = N_1 \cdot \frac{l_e}{l_e}$$

$$l_e = 2 \cdot (a + c) + \Pi \cdot e = 2 \cdot (1 + 3) + \Pi \cdot 1 = 11,4 \text{ cm}$$

$$H = \frac{3062 \cdot 25 \cdot 10^{-3}}{11,14} \cong 6,87 \frac{\text{A} \cdot \text{zav.}}{\text{cm}}$$

Sa dijagrama Hann-a (Dodatak 13) za

$$H = 6,87 \frac{\text{A} \cdot \text{zav.}}{\text{cm}} \Rightarrow \xi = \alpha = 9,5 \cdot 10^{-4}, W_L = \beta = 2,8 \cdot 10^{-4} \quad \beta = \frac{L \cdot I^2}{S \cdot l_e}$$

$$\text{Pa je } \delta = l_e \cdot \alpha = 9,5 \cdot 10^{-4} \cdot 11,14 = 0,01058 \text{ cm} = 0,1058 \text{ mm}, p = \frac{\delta}{2} = 0,0529 \text{ mm}.$$

$$L_1 = \frac{R_c}{2 \cdot \Pi \cdot f_{\min}} = \frac{240}{2 \cdot \Pi \cdot 50} = 0,76394 \cong 0,76 \text{ H}$$

$$S_{\text{eff}} = \frac{L_1 \cdot I^2}{\beta \cdot l_e} = \frac{0,76 \cdot 25^2 \cdot 10^{-6}}{2,8 \cdot 10^{-4} \cdot 11,14} \cong 0,153 \text{ cm}^2$$

$$N_2 = N_1 \cdot \sqrt{\frac{R_p}{R_c}} = 3062 \cdot \sqrt{\frac{15}{240}} = 765,5 \cong 766 \text{ zav.}$$

$$I_2 = \frac{N_1}{N_2} \cdot I_1 = \frac{3062}{766} \cdot 17,625 = 70,45 \text{ mA}$$

$$d_{z1} = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{I_1}{J}} = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{30,6186 \cdot 10^{-3}}{2,5}} \approx 0,1255 \text{ mm}$$

$$d_{z2} = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{I_2}{J}} = 1,13 \cdot \sqrt{\frac{70,45 \cdot 10^{-3}}{2,5}} \approx 0,18969 \text{ mm}.$$

4 Impulsni transformatori

Impulsni transformatori su posebna kategorija transformatora optimizovana za prenos četvrtki ili digitalnih impulsa konstantne amplitude. Verzije manje snage nalaze primenu u sprezanju izlaza digitalnih logičkih kola sa talasovodnim signalnim linijama. Verzije veće disipacije koriste se za sprezanje kontrolnih sistema sa poluprovodničkim elementima na visokim potencijalima. U opštem slučaju, transformacijom amplitude impulsni transformator može generisati impulse velikih amplituda koji nalaze primene u radarskim sistemima.

Spisak zahteva koje impulsni transformator mora ispuniti je pozamašan. Uslov verodostojnog prenosa četvrtastog impulsa sa primara na sekundar (prenos sa zanemarljivom distorzijom) je veliki propusni opseg i mali parazitni kapacitet i podužnu induktivnost. Ako se primenjuje u visoko naponskim sistemima dodatno se nameće i uslov velike izlacione otpornosti između navoja.

Merilo kvaliteta impulsnih transformatora je proizvod amplitude četvrtastog signala i njenog trajanja (tzv. integral napona u vremenu).

Zadatak 4.1

a) Navesti izraze koji povezuju snagu disipacije ($P = R \cdot I^2$) jednog elementa (namotaja) sa nadtemperaturom ($\Delta\Theta$) i ostalim parametrima za: (1) Trajan rad; (2) Kratkovremeni rad.

b) Izvesti izraz za gustinu struje J_2 za impulsni režim (2), trajanja t_1 .

c) Ako je gustina struje za režim (1) data sa:

$$J_1 = \left(\frac{\Delta\Theta}{4h + \frac{4h^2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\text{A}}{\text{mm}^2} \right], \text{ gde je } h \text{ visina namotaja u santimetrima. Koliko je } \tau_1 \text{ za } \frac{J_2}{J_1} = 10, \text{ ako je}$$

$$h = 5 \text{ mm} \left(C_{Cu} = 0,4 \frac{\text{J}}{^\circ\text{C}_g}, \gamma_{Cu} = 8,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \rho_{Cu} = 0,172 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \right).$$

REŠENJE

a)

$$P = \alpha \cdot S \cdot \Delta\Theta \quad (4.1.1)$$

gde je α - sačinilac prenošenja toplote.

U režimu kratkovremenog rada sva toplota se troši na zagrevanje i ne stiže da se prenese-disipira:

$$R \cdot I^2 = C_{Cu} \cdot G_{Cu} \cdot \Delta\Theta \quad (4.1.2)$$

$$G_{Cu} = \gamma_{Cu} \cdot l_m \cdot S_i \cdot N \quad (4.1.3)$$

gde je C_{Cu} - specifična toplota

$$R = \rho \cdot \frac{N \cdot l_m}{S_i} \quad (4.1.4)$$

b)

$$J = \frac{I}{S_i} \quad (4.1.5)$$

$$J = \sqrt{\frac{C \cdot G \cdot \Delta\Theta}{R_t}} = \sqrt{\frac{C \cdot \gamma \cdot l_m \cdot S_i \cdot \Delta\Theta \cdot N}{\rho \cdot \frac{N \cdot l_m}{S_i} \cdot \tau_1}} = S_i \cdot \sqrt{\frac{C \cdot \gamma \cdot \Delta\Theta}{\rho \cdot \tau_1}} \quad (4.1.6)$$

$$J_2 = \sqrt{\frac{C_{Cu} \cdot \gamma_{Cu} \cdot \Delta\Theta}{\rho_{Cu} \cdot \tau_1}} \quad (4.1.7)$$

c)

$$\frac{J_2}{J_1} = 10; J_2 = \sqrt{\frac{C \cdot \gamma \cdot \Delta\Theta}{\rho \cdot \tau_1}} = 10 \cdot \sqrt{\frac{\Delta\Theta}{4h + \frac{4h^2}{3}}} \Rightarrow \frac{C \cdot \gamma \cdot \Delta\Theta}{\rho \cdot \tau_1} = 100 \cdot \frac{\Delta\Theta}{4h + \frac{4h^2}{3}} \Rightarrow \quad (4.1.8)$$

$$\tau_1 = \frac{C \cdot \gamma \cdot \left(4h + \frac{4h^2}{3} \right)}{100\rho} \cong 0,483 \text{ S} .$$

Zadatak 4.2

Znajući da impulsni transformator radi u režimu jednostranih (pravougaonih, trajanja τ_1) impulsa napona (U_1), najveće indukcije ΔB_1 ,

- Definisati impulsnu magnetsku propustljivost (μ_1) i pokazati kako se ona određuje na krivoj magnećenja;
- Naći relaciju koja povezuje ΔB_1 sa U_1 .

REŠENJE

a) Impulsna magnetska propustljivost određuje se kao količnik promene magnećenja indukcije ΔB_1 i jednačine magnećenja polja ΔH_1 .

$$\mu_1 = \frac{\Delta B_1}{\Delta H_1}. \quad (4.2.1)$$

Posle desetak impulsa dolazi do stabilizacije. Petlja počinje na osi a završava se na krivoj magnećenja.

b)

$$u = L_1 \cdot \frac{di}{dt} = N_1 \cdot \frac{d\Phi}{dt} = N_1 \cdot S_{eff} \cdot \frac{dB}{dt}; \quad \Phi = S_{eff} \cdot B \quad (4.2.2)$$

$$\int_0^{\tau_1} u \cdot dt = U_1 \cdot \tau_1 = N_1 \cdot S_{eff} \cdot \Delta B_1 \quad (4.2.3)$$

Smatra se da je za vreme trajanja impulsa napon konstantan $u = U_1$

$$\Delta B_1 = \frac{U_1 \cdot \tau_1}{N_1 \cdot S_{eff}}. \quad (4.2.4)$$

5 Otpornici

Svakako najzastupljenija elektronska komponenta, savremeni otpornici se proizvode razrađenim i dobro modeliranim tehnološkim postupkom koji po pravilu koristi jeftine materijale za konstrukciju. Ne samo da je cena otpornika jako mala već se otpornici raznih vrednosti otpornosti u sedam ili više dekada proizvode u istoj formi (kućištu).

Po brojnosti ništa manje zastupljeni od diskretnih otpornika, integrisani otpornici takode nalaze mesto u zbirci kroz primere konstruisanja.

Pored elementarne funkcije otpornosti, otporni elementi mogu imati i senzorska svojstva. Pored senzora magnetskog polja, intenziteta svetlosti, pozicije i drugih fizičkih veličina, posebno mesto zauzimaju termistori kao senzori temperature široke primene. Modeliranje ovakvog senzora od posebnog je značaja u medicinskoj primeni.

Zadatak 5.1

Dva žičana otpornika, R_1 od konstantanske i R_2 od hrom-nikl žice, motanih jednoslojno zavojak do zavojka na telu prečnika $D=20\text{mm}$, vezana su paralelno u jednom uređaju. Dimenzionisati otpornike R_1 i R_2 (naći prečnik žice otpornika R_2 - d_2 , dužine žica l_1 i l_2 i dužine kalemskih tela l_1 i l_2 oba otpornika) tako da ukupna otpornost ne zavisi od manjih temperaturnih promena okoline i da struje koje pri radu prolaze kroz ove otpornike izazivaju istu promenu temperatura u njima.

Poznati su: prečnik žice prvog otpornika $d_1=0,2\text{mm}$ i otpornost $R_1=250\Omega$, kao i specifične otpornosti konstantana $\rho_1=1,1\Omega\text{mm}^2/\text{m}$ i temperaturni koeficijenti $\text{TCR}_1=-50\text{ppm}/^\circ\text{C}$ i $\text{TCR}_2=110\text{ppm}/^\circ\text{C}$, respektivno za otpornike R_1 i R_2 .

REŠENJE

U bilo kojoj mreži sa pasivnim elementima ukupna otpornost je neka funkcija od otpornosti pojedinih otpornika.

$$R=R(R_1, R_2, \dots, R_n) \quad (5.1.1)$$

Ukupna promena otpornosti (totalni diferencijal) je:

$$dR = \frac{\partial R}{\partial R_1} dR_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2} dR_2 + \dots + \frac{\partial R}{\partial R_n} dR_n \quad (5.1.2)$$

Ako izvršimo množenje jednačine (5.1.2) sa $\frac{1}{R \cdot \Delta\Theta}$ i predemo sa diferencijala na konačan priraštaj,

jednačina postaje

$$\frac{\Delta R}{R \cdot \Delta\Theta} = \underbrace{\frac{R_1}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial R_1}}_{f_1} \cdot \frac{\Delta R_1}{R_1 \cdot \Delta\Theta} + \underbrace{\frac{R_2}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial R_2}}_{f_2} \cdot \frac{\Delta R_2}{R_2 \cdot \Delta\Theta} + \dots + \underbrace{\frac{R_n}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial R_n}}_{f_n} \cdot \frac{\Delta R_n}{R_n \cdot \Delta\Theta} \quad (5.1.3)$$

$$\text{TCR} = f_1 \cdot \text{TCR}_1 + f_2 \cdot \text{TCR}_2 + \dots + f_n \cdot \text{TCR}_n \quad (5.1.4)$$

Kada se traži temperaturna stabilnost otpornika, pogodnim izborom otpornosti R_1, R_2, \dots, R_n i funkcija f_1, f_2, \dots, f_n treba učiniti $\text{TCR}=0$.

U ovom zadatku imamo

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (5.1.5)$$

$$dR = \frac{\partial R}{\partial R_1} dR_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2} dR_2 \quad (5.1.6)$$

$$dR = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} dR_1 + \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} dR_2 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{R \cdot \Delta\Theta} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot \Delta\Theta} \quad (5.1.7)$$

Kada se (7) pomnoži sa $\frac{1}{R \cdot \Delta\Theta}$ i sa diferencijala pređe na konačni priraštaj, dobija se

$$\frac{\Delta R}{R \cdot \Delta\Theta} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\Delta R_1}{R_1 \cdot \Delta\Theta} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\Delta R_2}{R_2 \cdot \Delta\Theta} \quad (5.1.8)$$

$$\text{TCR} = \frac{R_2 \cdot \text{TCR}_1 + R_1 \cdot \text{TCR}_2}{R_1 + R_2} = 0 \quad (5.1.9)$$

$$R_2 \cdot \text{TCR}_1 + R_1 \cdot \text{TCR}_2 = 0 \quad (5.1.10)$$

$$R_2 = \frac{\text{TCR}_2}{\text{TCR}_1} R_1 = -\frac{110}{-50} \cdot 250 = 550 \Omega \quad (5.1.11)$$

Pošto imamo R_1 i d_1 iz

$$R_1 = \rho_1 \frac{4l_{z1}}{\pi \cdot d_1^2} \quad (5.1.12)$$

nalazimo l_{z1}

$$l_{z1} = \frac{\pi \cdot d_1^2 \cdot R_1}{4\rho_1} = 15,7 \text{ m} \quad (5.1.13)$$

Iz izraza za otpornost R_2

$$R_2 = \rho_2 \frac{4l_{z2}}{\pi \cdot d_2^2} \quad (5.1.14)$$

i uslova da pregrevanja u oba otpornika treba da budu ista, tj. $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2$ mogu se naći l_{z2} i d_2 . Snaga disipacije otpornika R_1 i R_2 je

$$\begin{aligned} P_1 &= \alpha_1 \cdot S_{R1} \cdot \Delta\Theta_1 \\ P_2 &= \alpha_2 \cdot S_{R2} \cdot \Delta\Theta_2 \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

odnosno

$$\Delta\Theta_1 = \frac{P_1}{\alpha_1 \cdot S_{R1}} \quad , \quad \Delta\Theta_2 = \frac{P_2}{\alpha_2 \cdot S_{R2}} \quad (5.1.16)$$

Kako su oba otpornika žičana, to je $\alpha_1 = \alpha_2$, pa je

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{S_{R1}}{S_{R2}} \quad (5.1.17)$$

Otpornici su paralelno vezani, pa im je napon isti

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} \quad , \quad P_2 = \frac{U^2}{R_2} \quad (5.1.18)$$

Iz (5.1.17) i (5.1.18) se dobija

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{S_1}{S_2} \quad (5.1.19)$$

$$\frac{R_2}{R_1} \cong \frac{l_{z1} \cdot d_1}{l_{z2} \cdot d_2} \quad (5.1.20)$$

Iz jednačina (5.1.14) i (5.1.20) sledi

$$R_2 = \frac{4\rho_2}{\pi \cdot d_{z2}^2} \cdot l_{z1} \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{d_1}{d_2} = \rho_2 \cdot \frac{4l_{z1}}{\pi \cdot d_2^3} \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot d_1 \quad (5.1.21)$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\rho_2 \frac{4l_{z1}}{\pi \cdot R_2} \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot d_1} \approx 0,154 \text{ mm} \quad (5.1.22)$$

Iz jednačine (5.1.20) se dobija

$$l_{z2} = \frac{R_1 d_1}{R_2 d_2} l_{z1} = 9,283 \text{ m} \quad (5.1.23)$$

$$S_{R1} = l_{z1} \cdot d_1 = 31,4 \text{ cm}^2 \quad (5.1.24)$$

$$S_{R2} = l_{z2} \cdot d_2 = 14,27 \text{ cm}^2 \quad (5.1.25)$$

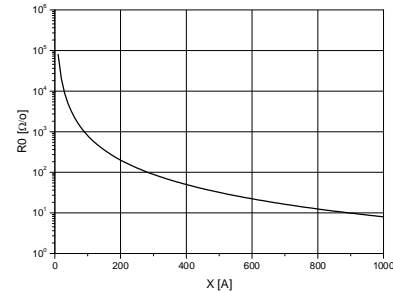
Dužine otpornika nalazimo iz jednačina

$$S_{R1} = \pi \cdot D \cdot l_1 \quad \Rightarrow \quad l_1 = \frac{S_{R1}}{\pi D} = 5 \text{ cm} \quad (5.1.26)$$

$$S_{R2} = \pi \cdot D \cdot l_2 \quad \Rightarrow \quad l_2 = \frac{S_{R2}}{\pi D} = 2,27 \text{ cm}$$

Zadatak 5.2

Dimenzionirati tankoslojni otpornik od nikel-hroma NiCr (legura sa 80% Ni i 20% Cr) naparenog na korvid staklu (naći n , d , l i R), za nominalnu snagu $P_{nom} = 0,125\text{W}$ i struju $I = 12,5\text{mA}$, ako je dozvoljena disipacija za otpornik od NiCr na korvid staklu $0,5\text{W}/\text{cm}^2$ ($0,5\text{W}/\text{cm}^2$ je površinska gustina snage). Zavisnost otpornosti sloja od debljine sloja data je na eksperimentalno dijagramom na slici.



(5.2.1)

Rešenje:

Površina slojnog otpornika je

$$S_R = ld = nd^2$$

Gde je $n=l/d$. Dozvoljena snaga disipacije mora biti veća ili u graničnom slučaju jednaka potrebnoj nominalnoj snazi podeljenoj sa površinom otpornika.

$$\frac{P_{nom}}{S_R} \leq P_d \quad (5.2.2)$$

$$S_R \geq \frac{P_{nom}}{P_d} \quad (5.2.3)$$

Potrebnu otpornost otpornika dobijamo iz nominalne snage i struje otpornika:

$$R = \frac{P_{nom}}{I^2} = \frac{1}{8 \cdot (12,5 \cdot 10^{-3})^2} = 800 \Omega \quad (5.2.4)$$

Sa dijagrama $x=f(R_0)$ usvajamo neku debljinu otpornika X i očitavamo R_0 . Za $x=400$ Å je $R_0=50 \Omega/\text{o}$. Pošto je $R = nR_0$,

$$n = \frac{R}{R_0} = \frac{800}{50} = 16 \quad (5.2.5)$$

Na osnovu nejednakosti (5.2.3), uzimajući u obzir granični slučaj

$$S_R = l \cdot d = n \cdot d^2 = \frac{P_{nom}}{P_d} = \frac{1}{8 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \quad (5.2.6)$$

$$d = \sqrt{\frac{1}{4n}} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 16}} = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ cm} \quad (5.2.7)$$

$$l = nd = 16 \cdot 0,125 = 2 \text{ cm} \quad (5.2.8)$$

Dobijene dimenzije za d i l su jako velike pa se dobijenim rešenjem ne bi mogli zadovoljiti, već bi usvojili novo x (recimo $x=0,03\mu\text{m}$) i ponovo vršili proračun.

Napomena:

Ne postoji neka generalna kriva $R_0 = \frac{\rho(x)}{x}$, već se te krive dobijaju eksperimentalno. Za industrijske svrhe $0,03 \mu\text{m} \leq x \leq 0,2 \mu\text{m}$. Takođe, d i l su reda mikrometra.

Zadatak 5.3

Prilikom proizvodnje jednog monolitnog integrisanog kola koristi se Si sa epitaksijalnim slojem n-tipa, koncentracije epitaksijalnog sloja $N_{ep}=3,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. Difuzijom bora iz konstantnog izvora koncentracije $N_0=8 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ u toku 42 minuta na temperaturi $T=12500\text{C}$ formiraju se u epitaksijalnom sloju baze potrebnih tranzistora srednje specifične provodnosti $\bar{\sigma} = 27,8 \frac{1}{\Omega\text{cm}}$.

U kolu je pored aktivnih elemenata potreban i izvestan broj otpornika sa otpornostima $R_1=450\Omega$ i $R_2=640 \Omega$. Dimenzionisati ove otpornike tako da se mogu formirati istovremeno sa bazama tranzistora, ako se zna da je koeficijent difuzije bora u silicijumu $D_{B-Si}=4 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{S}$ na $T=1250^\circ\text{C}$ i da preciznost fotolitografskog postupka dozvoljava najmanju širinu područja difuzije $d_{min}=20\mu\text{m}$.

REŠENJE

Da bi se bolje shvatio sam zadatak, treba poznavati tehniku integrisanih kola, a posebno fotolitografski postupak. Pošto se vrši difuzija iz konstantnog izvora, raspodela primesa vršice se po zakonu

$$N(x, t) = N_0 \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \quad (5.3.1)$$

Na mestu metalurškog spoja x_j , koncentracija primesa difundovanog materijala jednaka je koncentraciji primesa koje su ranije postojale u podlozi (primesa suprotnog tipa). Znači:

$$N(x_j, t) = N_0 \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x_j}{2\sqrt{Dt}}\right) \quad (5.3.2)$$

gde je x_j jednak debljini otpornika (debljina p-oblasti). Iz (5.3.2) sledi

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{x_j}{2\sqrt{Dt}}\right) = \operatorname{erfc}(z) = \frac{3,5 \cdot 10^{16}}{8 \cdot 10^{18}} = 4,375 \cdot 10^{-3} \quad (5.3.3)$$

Iz grafika (Dodatak 22) se dobija da je

$$z = \frac{x_j}{2\sqrt{Dt}} = 2 \quad (5.3.4)$$

$$x_j = 4\sqrt{4 \cdot 10^{-12} \cdot 42 \cdot 60} = 4\sqrt{1,008 \cdot 10^{-8}} \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ cm} = 4 \mu\text{m} \quad (5.3.5)$$

$$R_0 = \frac{\bar{\rho}}{x_j} = \frac{1}{\sigma \cdot x_j} = \frac{1}{27,8 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 89,928 \approx 90\Omega$$

Pošto je $R=R_0 \cdot n$, sledi da je

$$n_1 = \frac{R_1}{R_0} = \frac{450}{90} = 5 \quad (5.3.6)$$

$$n_2 = \frac{R_2}{R_0} = \frac{640}{90} = 7,111 \quad (5.3.7)$$

Pošto je $n=l/d$, da bismo našli dimanzije otpornika moramo imati još jednu jednačinu. Umesto te jednačine iskoristićemo uslov minimizacije i činjenicu da fotolitografski postupak dozvoljava $d_{min} \geq 20 \mu\text{m}$ i usvojiti $d=30 \mu\text{m}$.

Sledi da je:

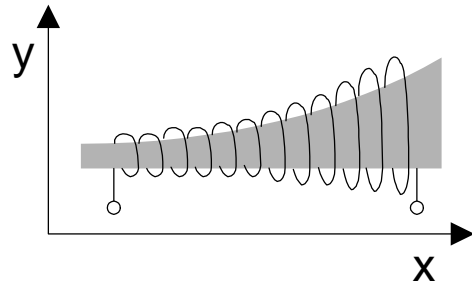
$$l_1 = n_1 \cdot d = 5 \cdot 30 = 150 \mu\text{m}$$

$$l_2 = n_2 \cdot d = 7,11 \cdot 30 = 213,3 \mu\text{m}$$

Zadatak 5.4

Pljosnato telo od pertinaksa, zanemarljive debljine, služi za namotavanje žice, sloj do sloja, za jedan žičani potencijometar. Ovo telo je prikazano na slici. Ako žica ima specifičnu otpornost ρ i prečnik d i ako telo od pertinaksa ima gornji deo oblika $Y=f(x)$, naći izraz za otpornost R_{AX} između tačaka A i X u funkciji navedenih veličina, smatrajući da je d mnogo manje od svih drugih dimenzija.

Kakvog oblika treba da bude telo da bi se otpornost potencijometra menjala po logaritamskom zakonu?



REŠENJE

a)

$$R_{AX} = \rho \frac{4l_x}{\pi d^2} \quad (5.4.1)$$

l_x je dužina žice između tačaka A i K.

$$S_x \approx l_x \cdot d \approx 2 \int_0^x f(x) dx \quad (5.4.2)$$

$$l_x = \frac{2}{d} \int_0^x f(x) dx \quad (5.4.3)$$

Iz jednačina (5.4.1), (5.4.3) se dobija

$$R_{AX} = \frac{8\rho}{d^3} \int_0^x f(x) dx \quad (5.4.4)$$

b)

Treba odrediti $f(x)$ tako da bude

$$R_{AX} = k \cdot \ln(1 + Ax) \quad (5.4.5)$$

gde je k po prirodi otpornost, a A recipročna vrednost dužine. Iz jednačina (5.4.4), (5.4.5) sledi

$$k \cdot \ln(1 + Ax) = \frac{8\rho}{\pi d^3} \int_0^x f(x) dx \quad (5.4.6)$$

Ako se diferenciraju i leva i desna strana po x

$$\frac{k \cdot A}{1 + Ax} = \frac{8\rho}{\pi d^3} f(x) \quad (5.4.7)$$

$$f(x) = \frac{k \cdot A \cdot \pi \cdot d^3}{8\rho \cdot (1 + Ax)} = \frac{k_1}{1 + Ax} \quad (5.4.8)$$

Zadatak 5.5

Žičani potenciometar je dobijen motanjem žice od konstantana (navojak do navojka) prečnika d i specifične otpornosti $\rho=0,5\Omega\text{mm/m}$, na telo od tekstolita zanemarljive debljine, oblika prikazanog na slici.

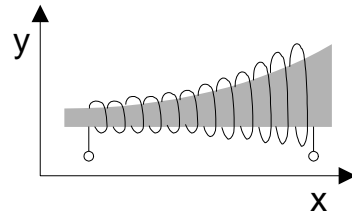
Visina tela sa za $9 < x < 100\text{mm}$ menja po zakonu $Y = \frac{k}{\sqrt{x}}$, gde je $k=90\text{mm}^{3/2}$.

Ako su na delu $0 \leq x \leq 9\text{mm}$ namotani zavojci kratko spojeni, onda je ukupna otpornost potenciometra $R=10\text{k}\Omega$. U tom slučaju odrediti:

a) prečnik d i dužinu l konstantanske žice

b) zavisnost otpornosti potenciometra od položaja klizača

c) odrediti otpornost R_1 otpornika koji bi trebalo vezati na red sa datim potenciometrom da bi se otpornost R_{12} između tačaka 1 i 2 menjala proporcionalno sa korenom iz x ($R_{12} = \text{const} \cdot \sqrt{x}$) u intervalu $9 \leq x < 100\text{mm}$



REŠENJE

a) Otpornost između tačaka 4 (dokle je potenciometar kratko spojen) i 2 je

$$R_{24} = R_{52} = \rho \cdot \frac{4l_{42}}{\pi d^2} \quad (5.5.1)$$

$$S_2 \approx l_{42} \cdot d \approx 2 \int_{x_1}^{x_0} f(x) dx \quad (5.5.2)$$

$$R_{24} = \frac{8\rho K}{\pi d^3} \int_{x_1}^x \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (5.5.3)$$

Otpornost između tačaka 4 i 3 je

$$R_{43} = \frac{8\rho K}{\pi d^3} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{16\rho K}{\pi d^3} (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}). \quad (5.5.4)$$

Pošto je $R_{53}=R_{43}=10\text{k}$, iz (5.5.4) sledi

$$d = \sqrt{\frac{16\rho K}{\pi R_{34}}} (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) = 0,054 \quad (5.5.5)$$

Iz jednačine (5.5.2), kada $x \rightarrow x_2$, sledi

$$l_{43} = \frac{4K}{d} (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) = \frac{4 \cdot 90}{0,054} (\sqrt{100} - \sqrt{9}) = 46 \text{ m} \quad (5.5.6)$$

$$l_{54} = \frac{S_{54}}{d} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 30}{0,054} = 10 \text{ m} \quad (5.5.7)$$

$$l = l_{43} + l_{54} = 56 \text{ m} \quad (5.5.8)$$

b) Na osnovu jednačine (5.5.3) se dobija

$$R_{24} = \frac{8\rho K}{\pi d^3} \int_{x_1}^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{16\rho K}{\pi d^3} (\sqrt{x} - \sqrt{x_1}) = 1,44 \cdot 10^3 (\sqrt{x} - 3) \quad \Omega \quad (5.5.9)$$

c) Prema uslovu zadatka je

$$R_{12} = R_1 + 1,44 \cdot 10^3 (\sqrt{x} - 3) = \text{const} \cdot \sqrt{x} \quad (5.5.10)$$

$$R_1 = 1,44 \cdot 10^3 \cdot 3 = 4,3 \text{ k}\Omega \quad (5.5.11)$$

Za $R_1 = 4,3 \text{ k}\Omega$ dobija se $R_{12} = 1,44 \cdot 10^3 \sqrt{x} \quad \Omega$.

Zadatak 5.6

Za stabilizator struje potrebno je proračunati i napraviti etalonski otpornik od konstantana sledećih karakteristika:

$$R = 0,5 \Omega; I = 20 \text{ A}; \Delta\theta = 80 \text{ }^\circ\text{C}$$

Na raspolaganju stoji konstantanska žica prečnika $d=0,5 \text{ mm}$, specifične otpornosti $\rho=0,5\Omega\text{mm}^2/\text{m}$ i keramička tela dužine $L=10\text{cm}$ i prečnika $D=2\text{cm}$.

REŠENJE

Pre svega, treba izračunati koliku snagu disipacije treba da ima željeni otpornik i na osnovu te snage mu proračunavati dimenzije.

$$P = RI^2 = 0,5 \cdot 20^2 = 200 \text{ W} \quad (5.6.1)$$

Snaga disipacije koju dozvoljava otpornik dobijen motanjem žice na jedno keramičko telo, čije su dimenzije date, je

$$P_1 = \alpha \text{ Si } \Delta\theta = \alpha \pi D L \Delta\theta = 10 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 80 = 5,024 \text{ W} \quad (5.6.2)$$

Na osnovu (5.6.1), (5.6.2) zaključujemo da je potrebno bar

$$n = \frac{P}{P_1} = \frac{200}{5,024} \approx 40 \quad (5.6.3)$$

keramičkih tela da bi bio zadovoljen uslov za snagu disipacije. Sada je potrebno naći otpornost jednog otpornika:

$$R_1 = \rho \cdot \frac{4l}{\pi d^2} \quad (5.6.4)$$

$$S_1 \approx l \cdot d = \pi DL \quad (5.6.5)$$

$$l = \frac{\pi DL}{d} = \pi DN = 3,14 \cdot 2 \cdot \frac{10}{5 \cdot 10^{-2}} = 12,68 \text{ m} \quad (5.6.6)$$

$$R_1 = \rho \cdot \frac{4l}{\pi d^2} = 0,5 \cdot \frac{4 \cdot 12,68}{\pi \cdot (0,5)^2} = 32 \Omega \quad (5.6.7)$$

Da bi ukupna otpornost bila $R=0,5\Omega$, mora se vezati

$$m = \frac{R_1}{R} = \frac{32}{0,5} = 64 \quad (5.6.8)$$

otpornika u paraleli. Struja kroz jedan otpornik je

$$I_1 = \sqrt{\frac{P_1}{R_1}} = \sqrt{\frac{5,024}{32}} = 0,396 \approx 0,4 \text{ A}, \quad (5.6.9)$$

što zadovoljava uslov zadatka da je $I=20\text{A}$.

Sa 64 ovakva tela zadovoljen je i uslov za dozvoljenu snagu disipacije.

Zadatak 5.7

Kondenzator promenljive kapacitivnosti ($TCC=50\text{ppm}^{\circ}\text{C}$) i redno vezana dva otpornika R_1 i R_2 , ukupne otpornosti R (R_1 je pirolitički sa $TCR_1=-200\text{ppm}^{\circ}\text{C}$, a R_2 je metalslojni sa $TCR_2=100\text{ppm}^{\circ}\text{C}$), čine osnovni deo jednog R-C oscilatora koji daje frekvenciju oscilacija $f=1/11RC$ (R i C redno vezani). Pod uslovima da za manje temperaturne promene frekvencija oscilacija treba da ostane nezavisna od temperature ($f \neq f(\Delta\theta)$ tj. $TCf=0$), odrediti vrednosti otpornosti R_1 i R_2 ako je $R=0,25\text{M}\Omega$

Koliku snagu P_R treba da razviju oba otpornika pri nadtemperaturi od 10°C i kolika je rasipna površina S_R istih potrebna da gubici u otporniku (omski) i u kondenzatoru (dielektrični) izazivaju iste nadtemperature $\Delta\theta_R = \Delta\theta_C$? Sačinilac prenošenja toplote oba otpornika je isti i iznosi $\alpha=2\cdot 10^{-3}\text{ W/cm}^2\cdot^{\circ}\text{C}$, dok kondenzator ima koeficijent nadtemperature $k=35^{\circ}\text{C/W}$ i tangens gubitaka $\delta=100\cdot 10^{-4}$.

REŠENJE

a) Polazimo od uslova da frekvencija treba da bude temperaturno stabilna, tj. $TCf=0$, te za dato kolo nalazimo TCf i izjednačavamo ga sa nulom.

$$df = \frac{\partial f}{\partial R} dR + \frac{\partial f}{\partial C} dC; \quad f = \frac{1}{11 \cdot RC} \quad (5.7.1)$$

$$df = -\frac{1}{11CR^2} dR - \frac{1}{11C^2R} dC \quad \Bigg/ \cdot \frac{1}{f \cdot \Delta\theta} = \frac{11RC}{\Delta\theta} \quad (5.7.2)$$

$$\frac{\Delta f}{f \cdot \Delta\theta} = \frac{\Delta R}{R \cdot \Delta\theta} + \frac{\Delta C}{C \cdot \Delta\theta} \quad (5.7.3)$$

$$-TCf = TCR + TCC = 0 \quad (5.7.4)$$

$$TCR = -TCC \quad (5.7.5)$$

Sada treba pronaći TCR .

$$R = R_1 + R_2 \quad (5.7.6)$$

$$\Delta R = \Delta R_1 + \Delta R_2 \quad \Bigg/ \cdot \frac{1}{R \cdot \Delta\theta} \quad (5.7.7)$$

$$\frac{\Delta R}{R \cdot \Delta\theta} = \left(R_1 \cdot \frac{\Delta R_1}{R_1 \cdot \Delta\theta} + R_2 \cdot \frac{\Delta R_2}{R_2 \cdot \Delta\theta} \right) \cdot \frac{1}{R} \quad (5.7.8)$$

$$TCR = (R_1 TCR_1 + R_2 TCR_2) \cdot \frac{1}{R} \quad (5.7.9)$$

Iz jednačina (5.7.5), (5.7.9) sledi

$$R_1 TCR_1 + R_2 TCR_2 = -R \cdot TCC \quad (5.7.10)$$

$$R = R_1 + R_2 \quad (5.7.11)$$

Iz sistema jednačina (5.7.10) i (5.7.6) se dobija

$$R_1 = -R \cdot \frac{TCR_2 + TCC}{TCR_1 - TCR_2} = \frac{R}{2} = 125 \text{ k}\Omega \quad (5.7.12)$$

$$R_1 = 125 \text{ k}\Omega, R_2 = 125 \text{ k}\Omega \quad (5.7.13)$$

b)

$$P_R = \alpha \cdot S_R \cdot \Delta\theta_R \quad (5.7.14)$$

$$kP_C = \Delta\theta_C \quad (5.7.15)$$

Iz uslova $\Delta\theta_R = \Delta\theta_C$ sledi

$$\frac{P_R}{\alpha S_R} = kP_C \quad (5.7.16)$$

$$P_R = R I^2 \quad (5.7.17)$$

$$P_C = R_r I^2 \quad (5.7.18)$$

$$\operatorname{tg} \delta = C_r R_r \omega \quad (5.7.19)$$

$$R_r = \frac{\operatorname{tg} \delta}{C_r \omega} \quad (5.7.20)$$

$$P_C = \frac{I^2 \cdot \operatorname{tg} \delta}{C_r \omega} \quad (5.7.21)$$

Iz jednačina (14), (15) i (19) se dobija:

$$k \cdot \frac{I^2}{2\pi fC} \cdot \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\alpha S_R} R I^2 \quad (5.7.22)$$

$$S_R = \frac{2\pi \cdot fCR}{k\alpha \cdot \operatorname{tg} \delta} = \frac{2\pi}{11k\alpha \cdot \operatorname{tg} \delta} = \frac{2 \cdot 3,14}{11 \cdot 35 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^{-4}} = 815,584 = 815,6 \text{ cm}^2 \quad (5.7.23)$$

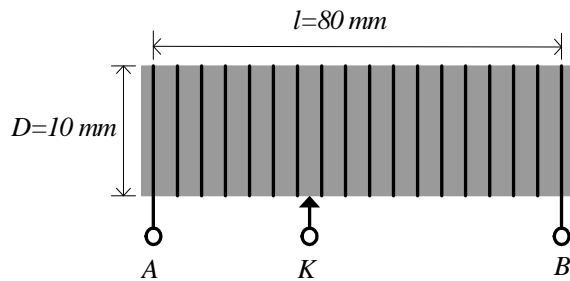
$$S_R = 815,6 \text{ cm}^2 \quad (5.7.24)$$

$$P_R = \alpha \cdot S_R \cdot \Delta\theta = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 815,6 \cdot 10 = 16,312 \text{ W} = 16,3 \text{ W} \quad (5.7.25)$$

$$P_R = 16,3 \text{ W} \quad (5.7.26)$$

Zadatak 5.8

Jedan žičani otpornik cilindričnog oblika, sa kliznim kontaktom prečnika $D=10\text{mm}$, dužine $l=80\text{mm}$ i otpornosti $R=800\Omega$, priključen je redno sa otpornikom od $R_1=5000\Omega$ na napon $U=200\text{V}$ i služi za regulaciju napona na R_1 .



a) Na kojoj će se najvećoj temperaturi θ_{\max} nalaziti deo otpornika između tačaka A i K ako se klizač K može pomerati između tačaka A i B za svih 80mm?

b) Kolika je temperatura otpornika θ_R ako se klizač nalazi u položaju B?

Pretpostaviti:

- da otpornost oba otpornika ne zavisi od temperature
- da se odvođenje toplote sa zagrejanog mesta na ostali deo mase vrši sporo
- da je temperatura okoline $\theta_0=20^\circ\text{C}$

REŠENJE

a) Polazeći od izraza za snagu disipacije

$$P = \alpha \cdot S \cdot \Delta\theta \quad (5.8.1)$$

dobija se

$$\Delta\theta = \frac{P}{\alpha \cdot S} \quad (5.8.2)$$

$$P_{AK} = R_{AK} \cdot I^2 = R \cdot \frac{x}{l} \cdot I^2 = \frac{R}{l} \cdot x \cdot \frac{u^2}{(R_1 + R_{AK})^2} = \frac{R \cdot u^2 \cdot x}{l \cdot \left(R_1 + \frac{800}{l}x\right)^2} \quad (5.8.3)$$

$$\Delta\theta_{AK} = \frac{P_{AK}}{\alpha \cdot S_{AK}} \quad (5.8.4)$$

$$S_{AK} = \pi \cdot D \cdot l_{AK} = \pi \cdot D \cdot x \quad (5.8.5)$$

Iz jednačina (5.8.3), (5.8.4) i (5.8.5) se dobija

$$\Delta\theta_{AK} = \frac{R \cdot x \cdot u^2}{\alpha \cdot \pi \cdot D \cdot l \cdot x \cdot \left(R_1 + \frac{R}{l}x\right)^2} = \frac{100 \cdot u^2}{10^{-3} \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot (5000 + 100x)^2} \quad (5.8.6)$$

$$\Delta\theta = \frac{4 \cdot 10^5}{\pi (100x + 5000)^2} \quad (5.8.7)$$

Iz jednačine (5.8.7) sledi $\Delta\theta_{AK} = \Delta\theta_{\max}$ kod $x \rightarrow 0$. Tada je

$$\Delta\theta_{\max} = \frac{4 \cdot 10^9}{\pi \cdot 25 \cdot 10^6} = \frac{160}{\pi} = 50,956 \approx 51^\circ\text{C} \quad (5.8.8)$$

$$\theta_{\max} = \theta_0 + \Delta\theta_{\max} = 20 + 51 = 71^\circ\text{C} \quad (5.8.9)$$

b) Za $x=l$ se iz jednačine (5.8.7) dobija

$$\Delta\theta_R = \frac{4 \cdot 10^9}{\pi \cdot (0,8 + 5) \cdot 10^6} = 37,868^\circ\text{C} \quad (5.8.10)$$

$$\theta_R = \theta_0 + \Delta\theta_R = 20 + 37,8 = 57,8^\circ\text{C} \quad (5.8.11)$$

Zadatak 5.9

a) Pokazati (izvođenjem) da za termistor važe relacije

$$\ln \frac{R_a}{R_i} = \frac{T_i}{T_a} \quad \text{i} \quad \alpha_i (T_a - T_i) = 1$$

gde su: R_i – otpornost termistora na temperaturi T_i ($i=1$ maksimum napona, $i=2$ minimum na statičkoj U-I karakteristici termistora); T_a – temperatura okoline; R_a – otpornost termistora na T_a ; α_i – temperaturni sačinilac otpornosti termistora za T_i .

a) Naći izraze za T_1 i T_2 kada je T_a poznato. Do koje temperature $T_{a \max}$ će postojati navedeni ekstremumi?

c) Objasniti postupak izrade termistora i navesti materijale od kojih se izrađuju.

REŠENJE

a) Polazeći od karakteristike otpornosti termistora u funkciji temperature

$$R = A \cdot e^{\frac{B}{T}} \quad (5.9.1)$$

$$R_a = A \cdot e^{\frac{B}{T_a}} \quad (5.9.2)$$

$$A = R_a \cdot e^{-\frac{B}{T_a}} \quad (5.9.3)$$

$$R = R_a \cdot \exp\left(B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_a}\right)\right) \quad (5.9.4)$$

$$\frac{dR}{dT} = R_0 \exp\left(B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right) \cdot \left(-\frac{B}{T^2}\right) = -\frac{B}{T^2} R \quad (5.9.5)$$

$$\frac{dR}{dT} \cdot \frac{1}{R} = -\frac{B}{T^2} \quad (5.9.6)$$

$$\alpha = -\frac{B}{T^2} \quad (5.9.7)$$

$$P = \frac{u^2}{R} = \alpha_k S_R (T - T_a) = k (T - T_a) \quad (5.9.8)$$

α_k je koeficijent odvođenja toplote usled konekcije

$$U^2 = kR(T - T_a) \quad (5.9.9)$$

$$2u \frac{du}{dT} = k \frac{dR}{dT} \cdot (T - T_a) + kR \quad (5.9.10)$$

$$\left. \frac{du}{dT} \right|_{\substack{T=T_i \\ R=R_i}} = 0 \quad (5.9.11)$$

$$\frac{dR}{dT} \cdot (T_i - T_a) = -R_i \quad (5.9.12)$$

$$\frac{dR}{dT} \cdot \frac{1}{R} = -\frac{1}{T_i - T_a} \quad (5.9.13)$$

$$\alpha_i \cdot (T_a - T_i) = 1 \quad (5.9.14)$$

Iz jednačina (6) i (15) se dobija

$$B = -T_i^2 \cdot \left(-\frac{1}{T_i - T_a}\right) = \frac{T_i^2}{T_i - T_a} \quad (5.9.15)$$

Smenom (16) u (4) dobija se

$$R_i = R_a \cdot \exp \left[\frac{T_i^2}{T_i - T_a} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_a} \right) \right] \quad (5.9.16)$$

$$R_i = R_a \cdot \exp \left[\frac{T_i^2 (T_a - T_i)}{(T_i - T_a) \cdot T_i T_a} \right] \quad (5.9.17)$$

$$R_i = R_a \cdot \exp \left(-\frac{T_i}{T_a} \right) \quad (5.9.18)$$

$$\ln \frac{R_a}{R_i} = \frac{T_i}{T_a} \quad (5.9.19)$$

b)

$$\alpha_i (T_a - T_i) = 1$$

$$-\frac{b}{T_i^2} (T_a - T_i) = 1 \Rightarrow T_i^2 - bT_i + bT_a = 0$$

$$T_{1/2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4bT_a}}{2}$$

Mora biti $b^2 - 4bT_a \geq 0$, odnosno $\frac{b}{4} > T_a$, to jest $T_{a \max} = \frac{b}{4}$.

c) Sinterovanjem od oksida materijala Fe, Mn, Wa, W, Ti na 1200 °C.

Zadatak 5.10

Redna veza otpornika R_C ($\alpha_C = \text{const.} > 0$) i termistora ($R_0 = 1\text{k}\Omega$ i $\alpha_\theta = -2\% / \text{K}$ za $T = 323\text{K}$) želi se upotrebiti za temperaturnu kompenzaciju. Može li se izabrati takav otpornik R_C da izmena ukupne otpornosti date redne vaza $R_{u0} = 3,5\text{k}\Omega$ (na $T_0 = 300\text{K}$) na granicama radnog opsega temperature (0°C , 70°C) ne bude veći od $\pm 0,1\%$?

REŠENJE

Poznato je da se otpornost termistora može predstaviti izrazom

$$R = A \cdot e^{\frac{B}{T}} = R_\infty \cdot e^{\frac{B}{T}} = R_\infty \cdot \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad (5.10.1)$$

a temperaturni sačinilac izrazom

$$T_C R_\theta = \alpha_\theta = -\frac{B}{T} \quad (5.10.2)$$

Na osnovu podataka iz teksta zadatka i relacije (5.10.2) se dobija

$$B = -(323)^2 \cdot (-2 \cdot 0,01) = 2086,58\text{K} \quad (5.10.3)$$

Na osnovu izraza (5.10.1) i dobijene vrednosti za B sledi

$$A = R_\infty = \frac{R_{323}}{\exp\left(\frac{2086,58}{323}\right)} = 1,5647957 \approx 1,565\Omega \quad (5.10.4)$$

Na temperaturi $T_0 = 300\text{K}$ otpornost termistora je

$$R_\theta = 1,565 \cdot \exp\left(\frac{2086,58}{300}\right) = 1641,15 \approx 1,641\text{k}\Omega \quad (5.10.5)$$

pa je na 300K

$$R_{C0} = R_u - R_{\theta0} = 3,512 - 1,641 = 1,859\text{k}\Omega \quad (5.10.6)$$

Pored vrednosti otpornika R_{C0} potrebno je poznavati i njegov temperaturni sačinilac otpornosti α_C . Obzirom na ulogu ove redne veze (kompenzacija temperaturne izmene redne otpornosti) treba da bude $\alpha_C > 0$, jer je $\alpha_\theta < 0$. Na temperaturi $T_1 = 273\text{K}$ ($\theta = 0^\circ\text{C}$) otpornost termistora, prema izrazu 1, iznosi

$$R_{\theta1} = 1,565 \cdot \exp\left(\frac{2086,58}{273}\right) = 3,265\text{k}\Omega \quad (5.10.7)$$

a na temperaturi $T_2 = 343\text{K}$ ($\theta = 70^\circ\text{C}$) je

$$R_{\theta2} = 1,565 \cdot \exp\left(\frac{2086,58}{343}\right) = 686,23\Omega \quad (5.10.8)$$

Prema uslovu zadatka treba da bude

$$\left| \frac{R_{u1} - R_{u0}}{R_{u0}} \right| \leq p = 0,001 \quad (5.10.9)$$

Zadržavajući znak jednakosti, dobija se

$$\alpha_{C1} = \frac{1}{|\Delta\theta_1|} \cdot \left(\frac{|\Delta R_{\theta1}|}{R_{u0}} \mp p \right) \frac{R_{u0}}{R_{C0}} \quad (5.10.10)$$

gde je

$$\Delta\theta_1 = \theta_0 - \theta_1 = 323 - 273 = 50^\circ\text{C} \quad (5.10.11)$$

$$\Delta R_{\theta1} = R_{\theta0} - R_{\theta1} = 1,641 - 3,265 = -1,624\text{k}\Omega \quad (5.10.12)$$

Na osnovu (5.10.8), (5.10.9), (5.10.10), (5.10.11) i (5.10.12) dobija se

$$0,032 \frac{1}{\text{k}} \leq \alpha_{C1} \leq 0,0324 \frac{1}{\text{k}} \quad (5.10.13)$$

Slično izrazu (5.10.10)(10) može se pisati

$$\alpha_{C2} = \frac{1}{|\Delta\theta_2|} \cdot \left(\frac{|\Delta R_{\theta_2}|}{R_{u0}} \pm p \right) \frac{R_{u0}}{R_{C0}} \quad (5.10.14)$$

gde je

$$\Delta\theta_2 = \theta_0 - \theta_2 = 323 - 343 = -20^0 C \quad (5.10.15)$$

$$\Delta R_{\theta_2} = R_{\theta_0} - R_{\theta_2} = 1,641 - 0,68622 = 0,95478 k\Omega \quad (5.10.16)$$

Smenom brojnih vrednosti nalazi se da je

$$0,0119 \frac{1}{k} \leq \alpha_{C2} \leq 0,01193 \frac{1}{k} \quad (5.10.17)$$

Dobijeni rezultati za α_{C1} i α_{C2} pokazuju da se ne može naći otpornik koji bi u datom opsegu temperatura obezbedio izmenu otpornosti ove redne veze unutar $\pm 0,1\%$.

Zadatak 5.11

Žičani otpornik i termistor vezani su na red. Parametri termistora su $R_{298}=5\Omega$ (otpornost „hladnog“ termistora pri sobnoj temperaturi $T=298\text{K}$) i $B=2600\text{K}$. Na sobnoj temperaturi redna veza je potpuno temperaturno kompenzovana.

a) Proračunati žičani otpornik (motan na cilindrično telo prečnika $D=15\text{mm}$) ako se upotrebi žica od mangana ($\rho=0,45\Omega\text{mm}^2/\text{m}$ i $\alpha_p=3\cdot 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$), $\Delta\theta=40^\circ\text{C}$.

b) Koliki su temperaturni sačinilac otpornosti i otpornost redne veze pri $\Delta\theta=80^\circ\text{C}$?

REŠENJE

a) Polazeći od poznatog izraza za zavisnost otpornosti od temperature

$$R_z = R_{z0}(1 + \alpha_p \cdot \Delta\theta) \quad (5.11.1)$$

$$R_\theta = R_\infty \cdot e^{\frac{B}{T}} = R_{\theta 0} \cdot \exp\left(\frac{B \cdot \Delta\theta}{(T + \Delta\theta) \cdot T_0}\right) \quad (5.11.2)$$

gde je $R_{\theta 0}$ otpornost termistora na sobnoj temperaturi $T_0=298\text{K}$.

Za male promene temperature u okolini temperature T može se u prvoj aproksimaciji uzeti da je

$$R = R_z + R_\theta = R_{z0} + R_{\theta 0} + (R_{z0} \cdot \alpha_p + R_{\theta 0} \cdot \alpha_\theta) \Delta\theta \quad (5.11.3)$$

gde je

$$\alpha_\theta = -B/T_2. \quad (5.11.4)$$

Iz uslova potpune temperaturne kompenzacije, na osnovu jednačine (5.11.3) nalazimo

$$R_{z0} = R_{\theta 0} \cdot \left| \frac{\alpha_{\theta 0}}{\alpha_p} \right| \quad (5.11.5)$$

Pošto je na osnovu (5.11.4)

$$\alpha_\theta = -2928 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{K}} \text{ na } T = T_0 = 298\text{K} \quad (5.11.6)$$

iz (5.11.5) se dobija $R_{z0}=4,88\text{k}\Omega$

Struja kroz otpornik je

$$I = \sqrt{\frac{P}{R_z}} = \sqrt{\frac{1}{4,88 \cdot 10^{-3} \cdot (1 + \alpha_p \Delta\theta)}} = 0,0143\text{A} \quad (5.11.7)$$

$$d_z = \sqrt{\frac{4I}{\pi J}} = 0,095\text{mm} \quad (5.11.8)$$

$$R_z = \rho \frac{4l_z}{\pi d_z^2} \quad (5.11.9)$$

Iz izraza $l_z d_z \approx \pi D l$ sledi $l = 15,5\text{cm}$.

b) Ekvivalentna otpornost serijske veze iznosi

$$R_T = R_z + R_\theta = R_{z0}(1 + \alpha \cdot A\theta) + R_{\theta 0} \cdot \exp\left(-\frac{BA\theta}{(T + A\theta) \cdot T_0}\right) \quad (5.11.10)$$

$$= R_z(378\text{K}) + R_\theta(378\text{K}) = 4,89\text{k}\Omega$$

$$\alpha_R = \frac{R_\theta \cdot \alpha_\theta + R_z \cdot \alpha_p}{R_T} \approx 3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}} \quad (5.11.11)$$

Zadatak 5.12

Jedan žičani otpornik napravljen je namotavanjem (navojak do navojka) žice od cekasa (specifične otpornosti $\rho=0,5\Omega\text{mm}^2/\text{m}$) na keramičko telo prečnika $D=10\text{mm}$. Impedansa tog otpornika na frekvenciji $f=1000\text{Hz}$ iznosi $Z=(50+j0,165)\Omega$.

Naći:

l – dužinu otpornika (dužinu tela otpornika)

d – prečnik žice

l_z – dužinu žice

P_d – snagu disipacije

Pri radu za nalaženje induktivnosti kalemova koristiti metod prema Weisu i Olendorfu.

Smatrati da je oksidni sloj zice dovoljan za izolaciju među navojcima, da reaktivna komponenta potiče samo usled induktivnosti otpornika, da je dozvoljeno pregrevanje $\Delta\theta=60^\circ\text{C}$ i da je $D\gg d$.

REŠENJE

Na osnovu date impedanse na $f=1000\text{Hz}$

$$Z=(50+j0,165)\Omega \quad (5.12.1)$$

$$0,165=2\cdot\pi\cdot f\cdot L \quad (5.12.2)$$

$$L=\frac{0,165}{2\pi\cdot 10^3}\approx 26,26\cdot 10^{-6}=26,26\mu\text{H} \quad (5.12.3)$$

$$D_0=D+d\approx D, \text{ jer je } D\gg d \quad (5.12.4)$$

$$S=\pi\cdot D\cdot l=l_z\cdot d \quad (5.12.5)$$

$$l_z=\frac{\pi D l}{d} \quad (5.12.6)$$

$$R=\rho\frac{4l_z}{\pi d^2} \quad (5.12.7)$$

$$d^3=\frac{4D\rho l}{R} \quad (5.12.8)$$

$$d=\sqrt[3]{\frac{4D\rho l}{R}}=\sqrt[3]{\frac{4\cdot 10\cdot 0,5}{50}l}=\sqrt[3]{0,4l}=A\cdot l^{1/3} \quad (5.12.9)$$

Ako se uzme l u metrima, d se dobija u milimetrima.

Po Weisu i Olendorfu je

$$L=L'\cdot\frac{l}{l_p} \quad (5.12.10)$$

$$L=1,256\cdot\frac{N^2\pi D^2}{4l}\cdot 10^{-8}=0,98646\cdot\frac{N^2 D^2}{l}\cdot 10^{-8} \text{ [H]} \quad (5.12.11)$$

gde su D i l vrednosti u cm.

Kako je $N=l/d$

$$L=0,98646\frac{D^2}{d^2}\cdot\frac{l^2}{d^2}\cdot 10^{-8}=0,98646\frac{l}{d^2}\cdot 10^{-8} \text{ [H]} \quad (5.12.12)$$

Uzeto je $D=1\text{cm}$ i potrebno je uzeti vrednosti l i d u cm.

$$L=L'\cdot\frac{l}{l_p}=0,98646\frac{l}{d^2}\cdot 10^{-8}\cdot\frac{l}{l_p} \text{ [H]} \quad (5.12.13)$$

Iz jednačine (5.12.9) se dobija

$$d=\sqrt[3]{0,4l} \text{ [mm]}=0,1\cdot\sqrt[3]{0,004l} \text{ [cm]} \quad (5.12.14)$$

gde l treba uneti u cm.

Iz jednačina (5.12.13) i (5.12.14) nalazimo

$$L = 0,98646 \cdot \frac{l}{(0,1 \cdot \sqrt[3]{0,004l})^2} \cdot 10^{-8} \frac{l}{l_p} \quad [\text{H}] \quad (5.12.15)$$

Zamenom vrednosti za L iz (5.12.3) dobija se

$$26,26 \cdot 10^{-6} = \frac{0,98646}{10^{-2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{l}{16}} \cdot \frac{1}{10^{-2}} \cdot 10^{-8} \frac{l}{l_p} \quad (5.12.16)$$

$$\sqrt[3]{l} \cdot \frac{l}{l_p} = \frac{0,2626}{0,98646} \cdot \sqrt[3]{16} \approx 0,670793 \quad (5.12.17)$$

$$Y = 0,670793 = \sqrt[3]{l} \cdot \frac{l}{l_p} \quad (5.12.18)$$

Da bismo nacrtali krivu $Y=f(l)$ prema (19), usvajamo l u cm, zatim nalazimo l/l_p po obrascu

$$\frac{l_p}{l} = 1 + 0,45 \frac{D}{l} - 0,005 \left(\frac{D}{l} \right)^2 \quad (5.12.19)$$

a onda sa dobijene krive za $Y=0,670793$ nalazimo traženo l . Dobijene vrednosti su tabelarno sredene:

l [cm]	l_p/l	$\sqrt[3]{l}$	$Y = \sqrt[3]{l} \frac{l}{l_p}$
0,5	1,880	0,7937	0,42218
0,8	1,556	0,9283	0,5966
0,9	1,4945	0,9644	0,6460
1,0	1,445	1,0000	0,6920
1,5	1,3978	1,1447	0,8189

Sa grafika se očitava $l = 0,98 \text{ cm} \approx 1 \text{ cm}$.

Usvajamo $l=1 \text{ cm}$.

Iz jednačine (5.12.9) $d = 0,15874 \text{ mm}$

Iz jednačine (5.12.6) $l_2 = 1,979 \text{ m}$

Snaga disipacije je

$$P_d = \alpha \cdot S \cdot \Delta\theta = 10^{-3} \cdot \pi D l \cdot 60 = 0,188495 \text{ W}$$

$$P_d = 0,188495 \text{ W}$$

Zadatak 5.13

Jedan žičani otpornik predviđen je da radi u nekom uređaju na radnoj frekvenciji f_1 i temperaturi θ_1 . U navedenim radnim uslovima otpornost mu je za $q\%$ veća od otpornosti za jednosmerni signal. Iz određenih razloga radna frekvencija se poveća za $p\%$. Da bi otpornost otpornika tom prilikom ostala nepromenjena potrebno mu je promeniti radnu temperaturu za $\Delta\theta$.

Određiti promenu radne temperature $\Delta\theta$ u funkciji p , q i α_p (α_p je temperaturni koeficijent specifične otpornosti žice od koje je napravljen otpornik), smatrajući da se specifična otpornost žice od koje je napravljen otpornik menja linearno sa temperaturom i da je $R \sim (A + B\sqrt{f})$, A i B=const.

Smatrati da su promene otpornosti zbog sopstvene induktivnosti i kapacitivnosti otpornika zanemarljive i da se odnos otpornosti za naizmeničnu i jednosmernu struju menja sa promenom frekvencije kao kod pravolinijskog provodnika.

Naći $\Delta\theta$ za $q=40\%$, $p=4\%$ i $\alpha_p=10^{-3} 1/^\circ\text{C}$.

Rešenje:

Promena otpornosti usled skin efekta može se izračunati (po Wallot-u) po obrascu:

$$\frac{R}{R_0} \approx 1 + \frac{Z^4}{3} \quad \text{za } Z < 1, \text{ tj. pri relativno niskim učestanostima} \quad (5.13.1)$$

$$\frac{R}{R_0} \approx Z + \frac{1}{4} \quad \text{za } Z > 1, \text{ tj. pri relativno visokim učestanostima,} \quad (5.13.2)$$

gde je

$$Z = \frac{r}{2} \sqrt{\pi \sigma \cdot f \mu_0 \mu} \quad (5.13.3)$$

r – poluprečnik žice u cm

$$\sigma = \gamma = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\text{S}}{\text{cm}} \right] - \text{specifična otpornost} \quad (5.13.4)$$

f – frekvencija u Hz, $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-8}$ H/cm, Z je neimenovan broj.

Pošto je u zadatku $R \sim \sqrt{f}$, koristićemo obrazac (5.13.2), pa se dobija

$$\frac{R_1(\gamma_1, f_1)}{R_0(\gamma_1)} = \frac{1}{4} + \frac{r}{2} \sqrt{\pi \cdot \mu_0 \mu_r \cdot f_1 \cdot \frac{1}{\rho(\gamma_1)}} \quad (5.13.5)$$

$$\frac{R_2(\gamma_2, f_2)}{R_0(\gamma_2)} = \frac{1}{4} + \frac{r}{2} \sqrt{\pi \cdot \mu_0 \mu_r \cdot f_2 \cdot \frac{1}{\rho(\gamma_2)}} \quad (5.13.6)$$

Kako je $R_1(\gamma_1, f_1) = R_2(\gamma_2, f_2)$ i

$$\left. \begin{aligned} \rho(\gamma_1) &= \rho_1, \quad \rho_2 = \rho_1(1 + \alpha \Delta\theta) \\ \rho(\gamma_2) &= \rho_2 \\ R &= \rho \frac{l}{S} \end{aligned} \right\} \quad (5.13.7)$$

sledi da je

$$\rho_1 \frac{l}{S} \left(\frac{1}{4} + a \sqrt{\frac{f_1}{\rho_1}} \right) = \rho_2 \frac{l}{S} \left(\frac{1}{4} + a \sqrt{\frac{f_1}{\rho_1}} \cdot \sqrt{\frac{1 + 0,01p}{1 + \alpha_p \cdot \Delta\theta}} \right) \quad (5.13.8)$$

Smatra se da l i S ostaju nepromenjene sa promenom temperature. Znajući da je

$$\frac{1}{4} + a \sqrt{\frac{f_1}{\rho_1}} = 1 + 0,01 \cdot q \quad (5.13.9)$$

$$\rho_2 = \rho_1 (1 + \alpha \cdot \Delta\theta)$$

dobija se

$$1 + 0,01 \cdot q = (1 + \alpha_\rho A\gamma) \cdot \left(\frac{1}{4} + a \sqrt{\frac{f_1}{\rho_1}} \cdot \sqrt{\frac{1 + 0,01 \cdot p}{1 + \alpha_\rho \cdot \Delta\theta}} \right) \quad (5.13.10)$$

$$1 + 0,01 \cdot q = \frac{1}{4} (1 + \alpha_\rho A\gamma) + a \sqrt{\frac{f_1}{\rho_1}} \cdot \sqrt{(1 + 0,01 \cdot p)(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)} \quad (5.13.11)$$

Usvajajući $\sqrt{1 + \alpha_\rho \cdot \Delta\gamma} \equiv x$, dobija se sledeća jednačina:

$$1 + 0,01 \cdot q = \frac{1}{4} x^2 + a \sqrt{\frac{f_1}{\rho_1}} \cdot \sqrt{(1 + 0,01 \cdot p)} \cdot x$$

$$1 + 0,01 \cdot q = \frac{1}{4} x^2 + (0,75 + 0,01 \cdot q) \cdot \sqrt{(1 + 0,01 \cdot p)} \cdot x \quad (5.13.12)$$

$$x^2 + 4 \cdot (0,75 + 0,01 \cdot q) \sqrt{(1 + 0,01 \cdot p)} \cdot x - 4(1 + 0,01 \cdot q) = 0$$

Jednačina je oblika $x^2 + Bx + C = 0$ i ima rešenje

$$x = \sqrt{1 + \alpha_\rho \cdot \Delta\gamma} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2} = 0,98637 \quad (5.13.13)$$

Usvaja se rešenje sa znakom +, jer vrednost korena mora da bude pozitivna.

$$B = 4 \cdot (0,75 + 0,01 \cdot q) \sqrt{(1 + 0,01 \cdot p)} = 4 \cdot (1,15 \cdot \sqrt{1,04}) = 4,6910979 \quad (5.13.14)$$

$$B = 4,6910979$$

$$C = -4 \cdot (1 + 0,40) = -4 \cdot 1,4 = -5,6$$

$$C = -5,6$$

$$x = \sqrt{1 + \alpha_\rho \cdot \Delta\gamma} = \frac{-4,691 \pm \sqrt{4,691^2 + 4 \cdot 5,6}}{2} = 0,98637$$

Iz zadnje jednačine se dobija $\Delta\theta = -27,1 \text{ } ^\circ\text{C}$, što je i logično, jer je $\alpha_\rho > 0$. Znači, θ treba da opada da bi i R_2 opadalo, a to sledi iz $R = R_0(1 + \alpha\theta)$, za $\alpha > 0$.

Zadatak 5.14

Jedan žičani otpornik predviđen je da radi u nekom uređaju na radnoj frekvenciji f_1 i temperaturi θ_1 . U navedenim radnim uslovima otpornost mu je za $q\%$ veća od otpornosti za jednosmerni signal. Iz određenih razloga radna frekvencija se poveća za $p\%$. Da bi otpornost otpornika tom prilikom ostala nepromenjena, potrebno mu je promeniti radnu temperaturu za $\Delta\theta$. Odrediti promenu radne temperature $\Delta\theta$ u funkciji p , q i α_p (α_p je temperaturni koeficijent specifične otpornosti žice od koje je napravljen otpornik), smatrajući da se specifična otpornost žice od koje je napravljen otpornik menja linearno sa temperaturom i da je $R \sim (A+B \cdot f^2)$, A i B su frekventno nezavisne veličine, a f je frekvencija.

Smatrati da su promene otpornosti zbog sopstvene induktivnosti i kapacitivnosti otpornika zanemarljive i da se odnos otpornosti za naizmjeničnu i jednosmernu struju menja sa promenom frekvencije kao kod provodnika.

Za $q=20\%$, $p=2\%$ i $\alpha_p=2 \cdot 10^{-3} \text{ } 1/^\circ\text{C}$ naći $\Delta\theta$.

REŠENJE

Polazeći od poznatih relacija za odnos otpornosti provodnika pri naizmjeničnoj i jednosmernoj struji

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \frac{Z^4}{3} \quad (5.14.1)$$

$$\frac{R}{R_0} = Z + \frac{1}{4} \quad \text{za } Z > 1, \text{ gde je } Z \text{ koeficijent za skin efekt žice,} \quad (5.14.2)$$

$$Z = \frac{r}{2} \sqrt{\pi \sigma \cdot f \mu_0 \mu_r}, \quad (5.14.3)$$

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \left[\frac{S}{m} \right], \quad \mu_0 \left[\frac{H}{m} \right], \quad r [m] \text{ je poluprečnik žice} \quad (5.14.4)$$

Na osnovu jednačine (5.14.1), koju koristimo zbog uslova zadatka, i jednačine (5.14.3) za temperaturu θ_1 i frekvenciju f_1 , je

$$R_1 = R_{01} \left(1 + \frac{r^4}{48} \pi^2 \gamma_1^2 f_1^2 \mu_0^2 \mu^2 \right) \quad (5.14.5)$$

$$R_2 = R_{02} \left(1 + \frac{r^4}{48} \pi^2 \gamma_2^2 f_2^2 \mu_0^2 \mu^2 \right) \quad (5.14.6)$$

Kako je $R_1=R_2$, uvodeći oznaku $A = \frac{r^4}{48} \pi^2 \mu_0^2 \mu^2$, dobijamo

$$R_{01} \left(1 + \gamma_1^2 f_1^2 \cdot A \right) = R_{02} \left(1 + \gamma_2^2 f_2^2 \cdot A \right) \quad (5.14.7)$$

Obzirom da je

$$\rho = 1/\gamma \quad (5.14.8)$$

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (5.14.9)$$

sledi da je

$$\rho_1 \frac{l}{S} \left(1 + A \frac{f_1^2}{\rho_1^2} \right) = \rho_2 \frac{l}{S} \left(1 + A \frac{f_2^2}{\rho_2^2} \right) \quad (5.14.10)$$

Koristeći uslove zadatka dobija se

$$\frac{R_1}{R_{01}} = 1 + A \frac{f_1^2}{\rho_1^2} = 1 + 0,01q \quad (5.14.11)$$

$$0,01q = A \frac{f_1^2}{\rho_1^2} \quad (5.14.12)$$

Takođe je

$$f_2 = f_1 + 0,01pf_1 = f_1(1 + 0,01p) \quad (5.14.13)$$

$$\rho_2 = \rho_1(1 + \alpha_\rho \cdot \Delta\theta) \quad (5.14.14)$$

Iz jednačina (5.14.10), (5.14.11), (5.14.12), (5.14.13) i (5.14.14) dobija se

$$1 + 0,01q = \frac{\rho_1(1 + \alpha_\rho \cdot \Delta\theta)}{\rho_1} \cdot \left(1 + A \cdot \frac{f_1^2(1 + 0,01p)}{\rho_1^2(1 + \alpha_\rho \cdot \Delta\theta)^2} \right) \quad (5.14.15)$$

odnosno

$$1 + 0,01q = (1 + \alpha_\rho \cdot \Delta\theta) + 0,01q + 0,01q \cdot \frac{(1 + 0,01p)^2}{1 + \alpha_\rho \cdot \Delta\theta} \quad (5.14.16)$$

Ako usvojimo

$$x \equiv 1 + \alpha_\rho \cdot \Delta\theta \quad (5.14.17)$$

iz (5.14.16) sledi

$$x^2 - (1 + 0,01q)x + 0,01q(1 + 0,01p)^2 = 0 \quad (5.14.18)$$

Rešavanjem kvadratne jednačine (5.14.18) dobija se

$$x_{1/2} = \frac{(1 + 0,01q) \pm \sqrt{(1 + 0,01q)^2 - 4 \cdot 0,01q(1 + 0,01p)^2}}{2} \quad (5.14.19)$$

Smenjujući q=20% i p=2% dobija se

$$x_{1/2} = \frac{1,2 \pm \sqrt{0,60768}}{2} \quad (5.14.20)$$

$$x_1 = 0,989764$$

$$x_2 = 0,21026$$

Iz (5.14.17) se dobija

$$\Delta\theta = \frac{x - 1}{\alpha_\rho}$$

$$\Delta\theta_1 = -5,1^\circ\text{C}$$

$$\Delta\theta_2 = -394,9^\circ\text{C}$$

$$\Delta\theta = -5,1^\circ\text{C}$$

$\Delta\theta_2$ se ne može prihvatiti iz fizičkih razloga.

Zadatak 5.15

Dimenzionirati otpornik u integrisanoj tehnici za nominalnu snagu od 0,05W i struju od 10mA, čija je debljina – debljina p oblasti jednog p-n spoja dobijenog difuzijom atoma bora u silicijum n-tipa, specifične otpornosti $\rho=0,5\Omega\text{cm}$, u trajanju 25 sekundi. Koncentracija atoma bora pri difuziji na površini silicijuma je konstantna i iznosi $N_B=5\cdot 10^{18}\text{ cm}^{-3}$. Poznato je da se pri istim uslovima difuzije za vreme $t'=100\text{s}$ formira

otpornik debljine $x_j=0,22\mu\text{m}$. uzeti da se slojna otpornost menja po zakonu $R_o = \frac{2,2\cdot 10^1}{x_j} \left[\frac{\Omega}{\text{A}} \right]$, gde je x_j

debljina otpornika (mesto metalurškog spoja) u μm . Dozvoljena disipacija za ovaj otpornik $P_d=5\text{W}/\text{cm}^2$.

Poznato je: pokretljivost n-nosilaca u silicijumu $\mu_n=1300\text{ cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$

z	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
erfc(z)	10^{-2}	$5\cdot 10^{-3}$	$2\cdot 10^{-3}$	$5,2\cdot 10^{-4}$	$2,5\cdot 10^{-4}$	$5,4\cdot 10^{-5}$

REŠENJE

Pošto difuzija iz stalnog izvora dovodi do sledećeg profila raspodele

$$N(x,t) = N_0 \cdot \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \quad (5.15.1)$$

na mestu metalurškog spoja će za ovaj slučaj biti

$$N_A = N_B \cdot \text{erfc}\left(\frac{x_j}{2\sqrt{Dt}}\right) = N_D \quad (5.15.2)$$

gde su:

N_A – koncentracija akceptora

N_D – koncentracija donora

N_B – koncentracija bora na površini uzorka

x_j – mesto metalurškog spoja

D – difuziona konstanta

t – vreme trajanja difuzije

Kako je

$$\rho \approx \frac{1}{e \cdot \mu_n \cdot N_D} \Rightarrow N_D = \frac{1}{\rho \cdot e \cdot \mu_n} \quad (5.15.3)$$

Iz jednačina (2) i (3) se dobija

$$N_B \cdot \text{erfc}\left(\frac{x_j}{2\sqrt{Dt}}\right) = \frac{1}{\rho \cdot e \cdot \mu_n} \quad (5.15.4)$$

$$\text{erfc}\left(\frac{x_j}{2\sqrt{Dt}}\right) = \frac{1}{\rho \cdot e \cdot \mu_n \cdot N_B} \approx 2 \cdot 10^{-3} \quad (5.15.5)$$

Na osnovu priložene tablice je

$$\frac{x_j}{2\sqrt{Dt}} = 2,2 \quad (5.15.6)$$

Kako je $x_j=x_j'=0,22\mu\text{m}$ za $t=t'=100\text{s}$, na osnovu jednačine (5.15.6) dobija se

$$\frac{x_j'}{2\sqrt{Dt'}} = 2,2 = \frac{0,22\mu\text{m}}{2\sqrt{Dt'}} \quad (5.15.7)$$

Na osnovu jednačina (5.15.6) i (5.15.7) dobija se

$$\frac{x_j}{x_j'} = \frac{2 \cdot 2,2\sqrt{Dt}}{2 \cdot 2,2\sqrt{Dt'}} \quad (5.15.8)$$

$$x_j = 0,22 \cdot \sqrt{\frac{t}{t'}} = 0,22 \cdot \sqrt{\frac{25}{100}} = 0,11 \mu\text{m} \quad (5.15.9)$$

Slojna otpornost je

$$R_0 = \frac{2,2 \cdot 10^5}{x_j} = \frac{2,2 \cdot 10^1}{0,11} = 200 \left[\frac{\Omega}{\frac{\circ}{A}} \right] \quad (5.15.10)$$

Površina otpornika je

$$S_R = l \cdot d = n \cdot d^2, \quad (5.15.11)$$

gde je

$$n = l/d \quad (5.15.12)$$

Otpornost slojnog otpornika je

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{\rho}{x} \cdot \frac{l}{d} = R_0 \cdot n \quad (5.15.13)$$

$$n = R/R_0 \quad (5.15.14)$$

Kako je nominalna snaga $P_{\text{nom}} = RI^2$,

$$R = \frac{P_{\text{nom}}}{I^2} = \frac{0,05}{(10 \cdot 10^{-3})^2} = 0,05 \cdot 10^4 = 500 \Omega \quad (5.15.15)$$

pa je

$$n = 500/200 = 2,5 \quad (5.15.16)$$

Kako mora biti zadovoljen uslov

$$\frac{P_{\text{nom}}}{S_R} \leq P_d \quad (5.15.17)$$

$$S_R \geq \frac{P_{\text{nom}}}{P_d} = \frac{0,05}{5} = 0,01 \text{ cm}^2 \quad (5.15.18)$$

Na osnovu jednačina (5.15.11) i (5.15.18) dobija se

$$S_R = 0,01 \text{ cm}^2 = nd^2 = 2,5d^2$$

$$d = \sqrt{\frac{0,01}{2,5}} = \frac{1}{5} \sqrt{0,001} = 0,0632 \text{ cm} = 0,632 \text{ mm}$$

$$d = 0,632 \text{ mm}$$

$$l = nd = 2,5 \cdot 0,632 = 0,158 \text{ cm} = 1,58 \text{ mm}$$

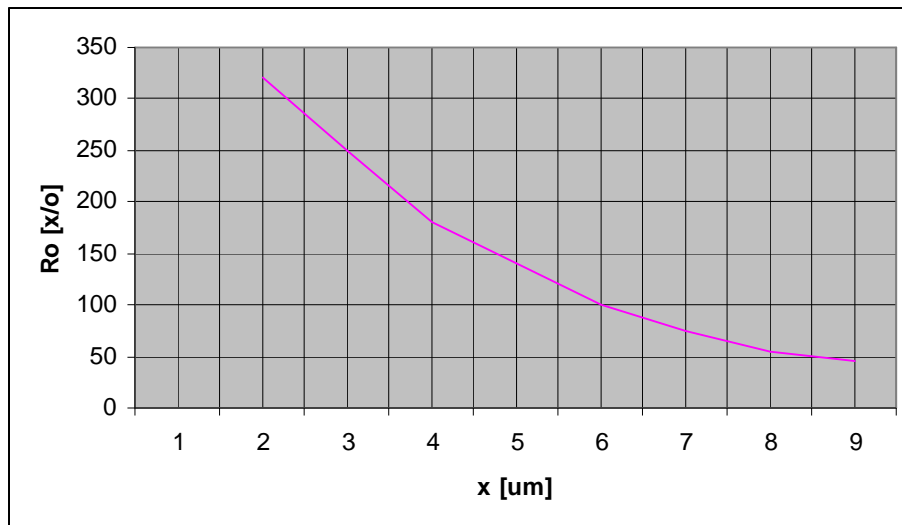
$$l = 1,58 \text{ mm}$$

Zadatak 5.16

Otpornik u integrisanoj tehnici dobijen je tako što je na uzorak silicijuma n-tipa specifične otpornosti $\rho=0,1383 \Omega\text{cm}$, nanet sloj akceptora debljine $d=0,01\mu\text{m}$ na površinu 1mm^2 , koncentracije $N=5\cdot 10^{22} \text{cm}^{-3}$, a onda izvršena difuzija u trajanju od 20s na temperaturi 1073K. Pokretljivost elektrona silicijuma na sobnoj temperaturi je $\mu_n=1600 \text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$, a difuziona konstanta nanesenog akceptora u silicijumu na temperaturi 1073K je $D=5\cdot 10^{-10} \text{cm}^2/\text{s}$.

Naći dimenzije tako dobijenog otpornika i njegovu maksimalnu snagu disipacije, ako je temperaturni sačinilac prenošenja toplote α i ako nadtemperatura tog otpornika ne sme da pređe $\Delta\theta=150^\circ\text{C}$.

Poznati su $P_{\text{nom}}=0,15\text{W}$ i $I_{\text{nom}}=25\text{mA}$, a slojna otpornost tako dobijenog otpornika se menja prema slici, $\alpha=0,002 \text{W}/\text{cm}^2\text{C}$



REŠENJE

Polazimo od poznate relacije

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = e \cdot \mu_n \cdot n + e \cdot \mu_p \cdot p \quad (5.16.1)$$

što je u ovom slučaju

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \approx e \cdot \mu_n \cdot n \quad (5.16.2)$$

$$n = \frac{1}{\mu_n \cdot e \cdot \rho} = \frac{1}{1600 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,1383} = 2,82 \cdot 10^{16} = N_D \quad (5.16.3)$$

Difuzijom iz sloja, raspodela primesa vrši se po zakonu

$$N_A(x,t) = \frac{Q}{\sqrt{\pi Dt}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (5.16.4)$$

$$Q = N_0 \cdot d = 5 \cdot 10^{22} \cdot 0,01 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{16} \text{ atoma}/\text{cm}^2 \quad (5.16.5)$$

Na mestu metalurškog spoja x_j , tj. na mestu spoja p i n oblasti je

$$N_A = N_D = \frac{Q}{\sqrt{\pi Dt}} \cdot \exp\left(-\frac{x_j^2}{4Dt}\right) \quad (5.16.6)$$

$$\frac{N_D \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{Dt}}{Q} = \exp\left(-\frac{x_j^2}{4Dt}\right) \quad (5.16.7)$$

$$\frac{2,82 \cdot 10^{16} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{5 \cdot 10^{-10} \cdot 20}}{5 \cdot 10^{16}} = \exp\left(-\frac{x_j^2}{4 \cdot 5 \cdot 10^{-10} \cdot 20}\right) \quad (5.16.8)$$

$$-\frac{x_j^2}{4 \cdot 10^{-8}} = \ln 10^{-4} \quad (5.16.9)$$

$$x_j = \sqrt{4 \cdot 10^{-8} \cdot 9,21} \approx 6,0696 \cdot 10^{-4} \text{ cm} \quad (5.16.10)$$

Sa dijagrama se očitava da je $R_o = 100 \Omega$

Iz $P_{nom} = RI_{nom}^2$ se dobija

$$R = \frac{P_{nom}}{I_{nom}^2} = \frac{0,25}{(25 \cdot 10^{-3})^2} = 400 \Omega \quad (5.16.11)$$

$$n = \frac{R}{R_o} = \frac{400}{100} = 4$$

$$n = \frac{l}{d} = 4 \Rightarrow l = 4d \quad (5.16.12)$$

$$S_R = l \cdot d = 1 \text{ mm}^2 \Rightarrow 4d^2 = 1 \text{ mm}^2$$

$$d = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ mm}, l = 2 \text{ mm}$$

$$P_{dis} \geq \frac{P_{nom}}{S_R} = \frac{0,25 \text{ W}}{1 \text{ mm}^2} = 25 \frac{\text{W}}{\text{cm}^2} \Rightarrow P_{dis}^{\min} = 25 \frac{\text{W}}{\text{cm}^2} \quad (5.16.13)$$

Kako je $P_{dis} = \alpha \cdot S_R \cdot \Delta\theta$, sledi da je

$$\alpha = \frac{P_{dis}}{S_R \cdot \Delta\theta} = \frac{0,25 \text{ W}}{10^{-2} \text{ cm}^2 \cdot 150 \text{ }^\circ\text{C}} = \frac{1}{6} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2 \cdot \text{ }^\circ\text{C}} = 1,666 \cdot 10^{-1} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2 \cdot \text{ }^\circ\text{C}} \quad (5.16.14)$$

6 Kondenzatori

Problematika konstrukcije kondenzatora uglavnom je bila bazirana na analizi geometrijske strukture koja dozvoljava realizaciju tražene kapacitivnosti. Ovaj problem pogotovo je od značaja u realizaciji promenljivih kondenzatora kod kojih se zahteva da realizuju određenu analitičku funkciju u zavisnosti od položaja mehaničkog pozicionera.

Razvoj tehnologije materijala omogućio je da se čitav spektar veštačkih materijala može koristiti za konstrukciju čime značaj geometrije tela kondenzatora značajno umanjen. Danas su na raspolaganju kondenzatori u opsegu od nekoliko pF do μF u istom kućištu i veoma sličnih performansi.

Savremena tehnologija konstruisanja integrisanih elektronskih kola omogućava i realizaciju kondenzatora na CMOS kompatibilnoj tehnologiji. Isto kao i sa integrisanim otpornicima, problem predstavlja realizacija velikih vrednosti kapaciteta.

Zadatak 6.1

Izvesti obrasce $f/f_{\max}=\varphi(\alpha)$, $r=X(\alpha)$, i $\lambda/\lambda_{\max}=\Psi(\alpha)$ za kružni oblik ploča i nacrtati ove zavisnosti za srednjetalasno područje. Da li ove funkcije zavise od broja ploča kondenzatora, razmaka između njih i vrednosti C_{\max} i C_{\min} ? Da li je ovakav oblik ploča pogodan za kondenzator u radioprijemnicima?

REŠENJE

Poznato je da se promena kapacitivnosti sa promenom ugla kod obrtnih kondenzatora daje kao

$$\frac{dC}{d\alpha} = k_1 (r^2 - r_a^2) \quad (6.1.1)$$

Pošto je u ovom slučaju $r=X(\alpha)=\text{const}$.

$$\frac{dC}{d\alpha} = k_2, \quad (6.1.2)$$

odnosno

$$C = C_{\min} + k_2 \cdot \alpha \quad (6.1.3)$$

gde je

$$k_2 = \frac{C_{\max} - C_{\min}}{\pi} \quad (6.1.4)$$

U oscilatornom kolu je

$$\frac{f}{f_{\max}} = \sqrt{\frac{C_{\min}}{C}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{C}{C_{\min}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + k_2 \cdot \frac{\alpha}{C_{\min}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{C_{\max} - C_{\min}}{C_{\min}} \cdot \frac{\alpha}{\pi}}} = \quad (6.1.5)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\xi - 1) \frac{\alpha}{\pi}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 8 \frac{\alpha}{\pi}}}$$

$$\xi = \frac{C_{\max}}{C_{\min}} = \left(\frac{f_{\max}}{f_{\min}} \right)^2 = \left(\frac{1500}{500} \right)^2 = 9 \quad (6.1.6)$$

Znači,

$$\frac{f}{f_{\max}} = \varphi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + 8 \frac{\alpha}{\pi}}} \quad (6.1.7)$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_{\max}} = \Psi(\alpha) = \frac{f_{\max}}{f} \cdot \sqrt{\frac{C_{\min}}{C_{\max}}} = \frac{1}{\frac{f}{f_{\max}} \cdot \sqrt{\xi}} = \frac{1}{3 \cdot \varphi(\alpha)} \quad (6.1.8)$$

Sada ćemo napraviti tablice koje daju brojnu zavisnost $\varphi(\alpha)$ i $\Psi(\alpha)$ za pojedine uglove α :

α [rad]	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
$\frac{f}{f_{\max}} = \varphi(\alpha)$	1	0,568	0,521	0,444	0,399	0,361	0,333
$\frac{\lambda}{\lambda_{\max}} = \Psi(\alpha)$	0,33	0,509	0,641	0,745	0,839	0,922	1

Kao što se vidi iz jednačina (7) i (8), tražene funkcije zavise samo od odnosa C_{\max}/C_{\min} , a ne zavise od broja ploča n i međusobnog rastojanja d . Takođe se vidi da se $\varphi(\alpha)$ i $\Psi(\alpha)$ neravnomerno menjaju sa promenom ugla α , tako da bi skala bila pretrpana stanicama u jednom opsegu (na početku).

Zadatak 6.2

Vazdušni obrtni kondenzator, čije su ekstremne kapacitivnosti $C_{\min}=50\text{pF}$ i $C_{\max}=500\text{pF}$, predviđen je da radi u R-C generatoru učestanosti $f=k/C$, gde je k konstanta.

Naći $r=r(\alpha)$ kod kondenzatora, tako da se učestanost generatora menja linearno sa promenom ugla α

REŠENJE

Prema uslovu zadatka je

$$f = \frac{k}{C} \quad (6.2.1)$$

$$\frac{f_{\max}}{f_{\min}} = \frac{C_{\max}}{C_{\min}} \quad (6.2.2)$$

$$k = f_{\max} \cdot C_{\min} \quad (6.2.3)$$

$$f = \frac{C_{\min} \cdot f_{\max}}{C} \quad (6.2.4)$$

Poznato je kod obrtnih kondenzatora da je

$$\frac{dC}{d\alpha} = k_r (r^2 - r_a^2) \quad (6.2.5)$$

gde je $k_r = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2d} (n-1)$. Kada se učestanost menja linearno sa promenom ugla α , tada je

$$f = f_{\max} - m \cdot \alpha \quad (6.2.6)$$

$$m = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{\pi} \quad (6.2.7)$$

Iz jednačina (6.2.4), (6.2.6) i (6.2.7) se dobija

$$\frac{C_{\min} \cdot f_{\max}}{C} = f_{\max} - m \cdot \alpha \quad (6.2.8)$$

$$C = \frac{C_{\min}}{1 - \frac{m}{f_{\max}} \alpha} \quad (6.2.9)$$

Posle diferenciranja jednačine (6.2.9) po α dobija se

$$\frac{dC}{d\alpha} = \frac{C_{\min} \cdot \frac{m}{f_{\max}}}{\left(1 - \frac{m}{f_{\max}} \alpha\right)^2} = \frac{9 \cdot C_{\min}}{10 \cdot \pi \cdot \left(1 - \frac{9}{10} \cdot \frac{\alpha}{\pi}\right)^2} \quad (6.2.10)$$

jer je

$$\frac{m}{f_{\max}} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{f_{\min}}{f_{\max}}\right) = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{9}{10} \quad (6.2.11)$$

Na osnovu (6.2.5) i (6.2.10) sledi

$$\frac{9 \cdot C_{\min}}{10 \pi \cdot \left(1 - \frac{9}{10} \cdot \frac{\alpha}{\pi}\right)^2} = k_1 (r^2 - r_a^2) \quad (6.2.12)$$

Rešavajući prethodnu jednačinu po r dobija se

$$r = \sqrt{\frac{9 \cdot C_{\min}}{10\pi \cdot \left(1 - \frac{9}{10} \frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \cdot k_1} + r_a^2} \quad (6.2.13)$$

Nakon smene brojnih vrednosti za C_{\min} , r_a i k_1 dobija se

$$r = \sqrt{\frac{9 \cdot 50 \cdot 10^{-12}}{10\pi \cdot \left(1 - \frac{9}{10} \frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \cdot 29,6 \cdot 10^{-12}} + 1} = \sqrt{1 + \frac{0,483}{\left(1 - \frac{9}{10} \frac{\alpha}{\pi}\right)^2}} \quad [\text{cm}] \quad (6.2.14)$$

gde je $k_1 = 29,6 \cdot 10^{-12} \text{ F/cm}^2$

Zadatak 6.3

Jedan promenljivi kondenzator koji ima $n=21$ ploču, predviđen je da radi u oscilatornom kolu radio-prijemnika za srednjetalasno područje (500kHz-1500kHz). Usled duge upotrebe jedna ploča kondenzatora se deformisala, pa je zbog toga izvađena. Za koliko se promenila minimalna učestanost oscilatornog kola u tom slučaju, ako je minimalna kapacitivnost ostala ista i ako je izvađena ploča iz sredine kondenzatora (nije krajnja)?

REŠENJE

Za bilo koji kondenzator je

$$C = C_{\min} + C_{\alpha} \quad (6.3.1)$$

gde je

$$C_{\alpha} = \varepsilon_0 \varepsilon_r (n-1) \frac{S}{d} \quad (6.3.2)$$

Kada se iz sredine kondenzatora odstrani jedna ploča, biće

$$C' = C'_{\min} + C'_{\alpha} = C_{\min} + C'_{\alpha} \quad (6.3.3)$$

gde je

$$C'_{\alpha} = \varepsilon_0 \varepsilon_r (n-3) \frac{S}{d} \quad (6.3.4)$$

$$\frac{C'_{\alpha}}{C_{\alpha}} = \frac{n-3}{n-1} \quad (6.3.5)$$

$$C' = C_{\min} + C'_{\alpha} = C_{\min} + \frac{n-3}{n-1} C_{\alpha} = C_{\min} + \frac{n-3}{n-1} (C - C_{\min}) \quad (6.3.6)$$

$$C' = \frac{2}{n-1} C_{\min} + \frac{n-3}{n-1} C \quad (6.3.7)$$

$$C'(0) = C'_{\min} = C_{\min} = \frac{2}{n-1} C_{\min} + \frac{n-3}{n-1} C_{\min} \quad (6.3.8)$$

$$C'(\pi) = C'_{\max} = \frac{2}{n-1} C_{\min} + \frac{n-3}{n-1} C_{\max} \quad (6.3.9)$$

Pošto je

$$f = \frac{a}{\sqrt{C}}, \quad C_{\min} = C'_{\min} \quad \text{i} \quad f_{\max} = f'_{\max}, \quad (6.3.10)$$

sledi da je

$$\frac{C'_{\min}}{C'_{\max}} = \frac{f'_{\min}{}^2}{f'_{\max}{}^2} = \frac{f_{\min}{}^2}{f_{\max}{}^2} = \frac{C_{\min}}{\frac{2}{n-1} C_{\min} + \frac{n-3}{n-1} C_{\max}} = \frac{1}{\frac{2}{n-1} + \frac{n-3}{n-1} \xi} \quad (6.3.11)$$

gde je

$$\xi = \frac{C_{\max}}{C_{\min}} = \left(\frac{f_{\max}}{f_{\min}} \right)^2 = \left(\frac{1500}{500} \right)^2 = 9. \quad (6.3.12)$$

$$f'_{\min}{}^2 = \frac{f_{\max}{}^2 \cdot (n-1)}{2 + (n-3)\xi} \quad (6.3.13)$$

$$f'_{\min} = f_{\max} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{2 + (n-3)\xi}} = 1500 \cdot \sqrt{\frac{21-1}{2 + (21-3)\xi}} \quad (6.3.14)$$

$$f'_{\min} = 523,8 \text{ kHz} \Rightarrow \Delta f = f'_{\min} - f_{\min} = 23,8 \text{ kHz} \quad (6.3.15)$$

Zadatak 6.4

Jedan promenljivi kondenzator koji ima neparan broj ploča n , usled svoje nedovoljno tačne izrade ima mogućnost aksijalnog pomeranja rotora prema statoru.

- a) Odrediti (u opštem obliku) odstojanje $x=x_m$ rotorskih ploča od statorskih, tako da kapacitivnost promenljivog kondenzatora bude minimalna.
 b) Ako je rotor u mogućnosti da se aksijalno pomera za $\pm\Delta x=30\mu\text{m}$ od svoj srednjeg položaja ($x=a/2$) i ako je $a=1\text{mm}$ i $b=0,5\text{mm}$, za koliko se u ovom položaju menja kapacitivnost?

REŠENJE

a) Ukupna kapacitivnost obrtnog kondenzatora će biti

$$C = \frac{n-1}{2} C_1 + \frac{n-1}{2} C_2 = \frac{n-1}{2} (C_1 + C_2), \quad (6.4.1)$$

gde je $(n-1)/2$ ceo broj

$$C_1 = \varepsilon \frac{S}{x - \frac{b}{2}} \quad \text{i} \quad C_2 = \varepsilon \frac{S}{a - (x + \frac{b}{2})} \quad (6.4.2)$$

Znači,

$$C = \frac{n-1}{2} \varepsilon \cdot S \left(\frac{1}{x - b/2} + \frac{1}{a - x - b/2} \right) \quad (6.4.3)$$

ili

$$\frac{C}{\frac{n-1}{2} \varepsilon \cdot S} = y = \frac{1}{x - b/2} + \frac{1}{a - x - b/2}. \quad (6.4.4)$$

Da bi C bilo minimalno, treba da je

$$\frac{dC}{dx} = 0, \quad (6.4.5)$$

odnosno $\frac{dy}{dx} = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x - b/2)^2} + \frac{1}{(a - x - b/2)^2} = 0 \quad (6.4.6)$$

$$x - \frac{b}{2} = a - x - \frac{b}{2} \quad (6.4.7)$$

$$x_m = \frac{a}{2} \quad (6.4.8)$$

Usvojimo da je $A \equiv \frac{n-1}{2} \varepsilon S$. Tada je

$$C = A \left(\frac{1}{x - b/2} + \frac{1}{a - x - b/2} \right). \quad (6.4.9)$$

Ako se x promeni za Δy , C se menja za ΔC .

$$\frac{C + \Delta C}{A} = \frac{1}{x + \Delta x - b/2} + \frac{1}{a - x - \Delta x - b/2} = \left| \frac{1}{d + \Delta x} + \frac{1}{d - \Delta x} \right|_{x=a/2} \quad (6.4.10)$$

$$d = \frac{a-b}{2} \quad \text{za} \quad \Delta x \ll d \quad (6.4.11)$$

b) Iz

$$\frac{C + \Delta C}{A} = \frac{2d}{d^2 - (\Delta x)^2} \quad (6.4.12)$$

razvojem u red se dobija

$$\frac{C + \Delta C}{A} = \frac{2}{d} \left[1 + \left(\frac{\Delta x}{d} \right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{d} \right)^4 + \dots \right] \quad (6.4.13)$$

$$C + \Delta C = \frac{2A}{d} + \frac{2A}{d} \left(\frac{\Delta x}{d} \right)^2 + \frac{2A}{d} \left(\frac{\Delta x}{d} \right)^4 + \dots \quad (6.4.14)$$

Za $x=a/2$ je

$$C = \frac{2A}{d} \text{ i } \Delta C = \frac{2A}{d} \left(\frac{\Delta x}{d} \right)^2 \quad (6.4.15)$$

$$\frac{\Delta C}{C} = \left(\frac{\Delta x}{d} \right)^2 = 1,44\%$$

$$C = A \left(\frac{1}{x-b/2} + \frac{1}{a-x-b/2} \right) = A \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d} \right) = \frac{2A}{d} \quad (6.4.16)$$

$$C + \Delta C = A \left(\frac{1}{x+\Delta x-b/2} + \frac{1}{a-x-\Delta x-b/2} \right) = \frac{A}{d+\Delta x} + \frac{A}{d-\Delta x} \quad (6.4.17)$$

$$d = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{1}{2} - \frac{0,5}{2} = 0,25 \text{ mm} \quad (6.4.18)$$

$$\frac{C + \Delta C}{C} = 1 + \frac{\Delta C}{C}$$

Zadatak 6.5

Profil p-n spoja može se predstaviti funkcijom

$$N(x) = B \cdot x^m \text{ za } x > m$$

$$P(x) \gg N(x) \text{ za svako } x < 0$$

Odrediti parametar m tako da se sopstvena učestanost rezonantnog kola u kojem se dioda nalazi kao kapacitet menja linearno sa priključenim naponom U .

REŠENJE

Ako je $P(x) \gg N(x)$, tada je $x_p \ll x_n$ tj. možemo uzeti $x_p = 0$, tj. $x_n = W$.

$$\int_0^W x \rho(x) dx = \varepsilon \varepsilon_0 (U_0 - U) ; \quad \int_0^W x^{m+1} dx = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{eB} (U_0 - U) \quad (6.5.1)$$

$$\left[\frac{x^{m+2}}{m+2} \right]_0^W = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{eB} (U_0 - U) ; \quad \frac{W^{m+2}}{m+2} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{eB} (U_0 - U) \quad (6.5.2)$$

$$W = \left[\frac{(m+2) \cdot \varepsilon \varepsilon_0}{eB} (U_0 - U) \right]^{\frac{1}{m+2}} \quad (6.5.3)$$

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{W} S = \varepsilon \varepsilon_0 S \cdot \left[\frac{(m+2) \cdot \varepsilon \varepsilon_0}{eB} (U_0 - U) \right]^{-\frac{1}{m+2}} = S \cdot \left(\frac{m+2}{eB} \right)^{-\frac{1}{m+2}} \cdot (\varepsilon \varepsilon_0)^{\frac{m+1}{m+2}} \cdot (U_0 - U)^{-\frac{1}{m+2}} \quad (6.5.4)$$

$$C = K (U_D - U_0)^{-\frac{1}{m+2}}$$

$$fr = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \sim \frac{1}{\sqrt{C}} \sim (U_0 - U)^{\frac{1}{2(m+2)}}$$

$$\frac{1}{2 \cdot (m+2)} = 1 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

$$N(x) = B \cdot x^{-3/2}$$

Zadatak 6.6

Naći kapacitivnost jedne inverzno polarisane diode, poprečne površine $S=0,5\text{mm}^2$. Spoj je strm, sa $N=10^{15}\text{cm}^{-3}$ i $P=10^{17}\text{cm}^{-3}$.

Naponi inverzne polarizacije su 0, 5, 10V ($\epsilon=11$, $U_0=0,7\text{V}$). Dioda je na sobnoj temperaturi.

REŠENJE

$$\int_{-x_p}^{x_N} \rho(x)dx = 0; \quad - \int_{-x_p}^0 Pdx + \int_0^{x_N} Ndx = 0; \quad N \cdot x_N + P \cdot x_p = 0 \quad (6.6.1)$$

$$\int_{-x_p}^{x_N} x\rho(x)dx = \epsilon\epsilon_0 \cdot (U_0 - U); \quad - \int_{-x_p}^0 xPdx + \int_0^{x_N} xNdx = \frac{\epsilon\epsilon_0}{e} (U_0 - U) \quad (6.6.2)$$

$$+ \frac{x_p^2}{2} P + \frac{x_N^2}{2} N = \frac{\epsilon\epsilon_0}{e} (U_0 - U) \quad (6.6.3)$$

Iz (6.6.1) i (6.6.3) se dobija

$$x_N = \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_0}{e} (U_0 - U) \cdot \frac{P}{N(N+P)}} \quad (6.6.4)$$

$$x_p = \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_0}{e} (U_0 - U) \cdot \frac{N}{P(N+P)}} \quad (6.6.5)$$

$$C = S \frac{\epsilon\epsilon_0}{x_N + x_p} \quad (6.6.6)$$

Za $N \ll P$ je $C = S \sqrt{\frac{NP}{N+P} \cdot \frac{\epsilon\epsilon_0}{2(U_0 - U)}}$

$$C = S \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0 N}{2(U_0 - U)}} \quad (6.6.7)$$

$$C(0)=53\text{pF}$$

$$C(5)=18,6\text{pF}$$

$$C(10)=13,5\text{pF}$$

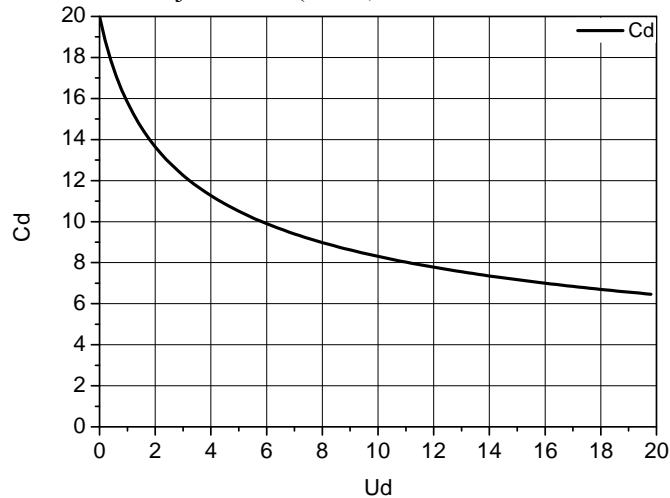
Zadatak 6.7

Jedna grana nekog elektronskog kola sastoji se od redne veze kondenzatora kapacitivnosti $C=5\text{ pF}$ i varikap diode čija je zavisnost kapacitivnosti od napona data na slici. Na tu granu je priključen jednosmerni napon U_0 i služi za regulaciju kapacitivnosti grane.

a) Naći kapacitivnost grane, ako je $U_0=20\text{V}$.

b) Koji se najveći napon može priključiti na ovu granu ako je $U_{\text{diode}}=5\text{V}$ i kolika je tada kapacitivnost grane?

Napomena: Zavisnost C_d od U_d na slici je statička ($C_{d\text{ stat.}}$)



REŠENJE

a) Količina naelektrisanja na varikap diodi i kondenzatoru je jednaka

$$C_d U_d = Q = C U_c = C_e U_0 = \frac{C C_d}{C + C_d} U_0 \quad (6.7.1)$$

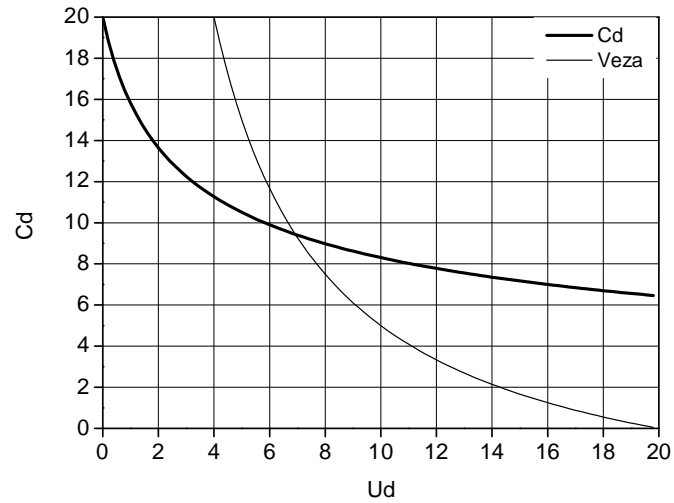
odakle se dobija

$$U_d = \frac{U_0}{1 + \frac{C_d}{C}} \quad (6.7.2)$$

Pa se kapacitet diode može iskazati preko napona diode kao

$$C_d = C \left(\frac{U_0}{U_d} - 1 \right) = 5\text{ pF} \cdot \left(\frac{20\text{V}}{U_d} - 1 \right) \quad (6.7.3)$$

Na osnovu prethodne jednačine pravi se grafik funkcije (6.7.3) i traži se presek sa krivom $C_d=f(U_d)$ koja je data na slici u tekstu zadatka.



Dobija se da je napon na diodi $U_d = 7$ V i kapacitet diode $C_d = 9.4$ pF. Sada se kapacitet veze računa kao

$$C_e = \frac{CC_d}{C + C_d} = 3.2 \text{ pF}$$

b) Sa grafika očitamo $U_d = 5$ V i $C_d = 10.5$ pF.

$$C_e = \frac{CC_d}{C + C_d} = 3.39 \text{ pF} \quad (6.7.4)$$

$$C_d U_d = C_e U'_0 \Rightarrow U'_0 = \frac{C_d U_d}{C_e} = 15.48 \text{ V} \quad (6.7.5)$$

Zadatak 6.8

- a) Dati ekvivalentnu šemu kondenzatora
- kada preovlađuju gubici u oblogama
- kada preovlađuju gubici u dielektriku
- kada se vodi računa o obe vrste ovih gubitaka
b) Napisati izreze za $\operatorname{tg}\delta$ u sva tri gore navedena slučaja

REŠENJE

$$\operatorname{tg}\delta = \omega C_r R_r \quad (6.8.1)$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{\omega C_p R_p} \quad (6.8.2)$$

$$\operatorname{tg}\delta = \omega C_e R_e \quad (6.8.3)$$

$$R_1 + \frac{R}{1 + j\omega CR} = R_e + \frac{1}{j\omega C_e} \quad (6.8.4)$$

$$R_e = R_1 + \frac{R}{1 + (\omega CR)^2}; \quad C_e = \frac{1 + (\omega CR)^2}{\omega^2 CR^2} \quad (6.8.5)$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1 + (\omega CR)^2}{\omega^2 CR^2} \cdot \left(R_1 + \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} \right) = \frac{1}{\omega CR} + \omega CR_1 + \frac{R_1}{\omega CR^2} \quad (6.8.6)$$

Zadatak 6.9

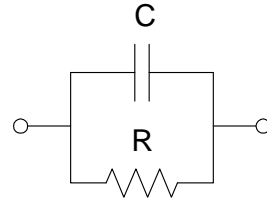
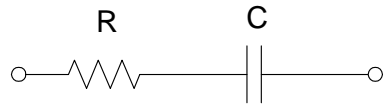
Ako jedan isti kondenzator predstavimo rednom i paralelnom vezom idealnog kondenzatora i otpora gubitaka, kao na slikama A i B, respektivno, pronaći:

a) efektivnu (stvarnu) vrednost kapacitivnosti kondenzatora C_{eff} u funkciji C_r i $\text{tg}\delta$, odnosno C_p i $\text{tg}\delta$

b) ekvivalentni tangens ugla gubitaka ($\text{tg}\delta$) u funkciji tangensa ugla gubitaka ($\text{tg}\delta_1$, $\text{tg}\delta_2$), dielektričnih konstanti (ϵ_1 , ϵ_2) i relativne debljine dielektrika x , ako se između kondenzatorskih obloga nalaze dva dielektrika, tako da se ekvivalentni kondenzator može predstaviti vezom dva realna kondenzatora (1 i 2)

i) na red

ii) u paraleli



Rešenje

a) C_{eff} je kapacitivnost koja određuje vrednost impednase Z kondenzatora na određenoj frekvenciji.

$$C_{\text{eff}} = \frac{1}{\omega Z} = \frac{Y}{\omega} \quad (6.9.1)$$

Sa slike A se računa

$$Z = \sqrt{R_r^2 + \frac{1}{(\omega C_r)^2}} = \frac{1}{\omega \cdot C_r} \sqrt{1 + (R_r \omega C_r)^2} = \frac{1}{\omega C_r} \cdot \sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta} \quad (6.9.2)$$

$$C_{\text{eff}} = \frac{1}{\omega Z} = \frac{1}{\omega \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_r} \sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta}} = \frac{C_r}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta}} \quad (6.9.3)$$

Sa slike B

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R_p}\right)^2 + (\omega C_p)^2} = \omega C_p \sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta} \quad (6.9.4)$$

$$C_{\text{eff}} = \frac{Y}{\omega} = C_p \sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta} \quad (6.9.5)$$

b)

i) $\text{tg}\delta = R_r \omega C_r$

$$\text{tg}\delta_1 = R_{r1} \omega C_{r1}$$

$$\text{tg}\delta_2 = R_{r2} \omega C_{r2}$$

$$R_r = R_{r1} + R_{r2}$$

$$C_r = \frac{C_{r1} \cdot C_{r2}}{C_{r1} + C_{r2}}$$

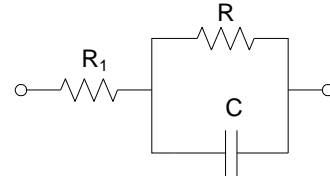
$$\text{tg}\delta = \omega \cdot (R_{r1} + R_{r2}) \cdot \frac{C_{r1} \cdot C_{r2}}{C_{r1} + C_{r2}} = \frac{C_{r2}}{C_{r1} + C_{r2}} \omega C_{r1} R_{r1} + \frac{C_{r1}}{C_{r1} + C_{r2}} \omega C_{r2} R_{r2}$$

$$\text{tg}\delta = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 \cdot \frac{1-x}{x} + \epsilon_2} \cdot \text{tg}\delta_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2 \cdot \frac{x}{1-x}} \cdot \text{tg}\delta_2$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } \quad \operatorname{tg} \delta &= \frac{1}{\omega C_p R_p} \\
 \operatorname{tg} \delta_1 &= \frac{1}{\omega C_{p1} R_{p1}} \\
 \operatorname{tg} \delta_2 &= \frac{1}{\omega C_{p2} R_{p2}} \\
 C_p &= C_{p1} + C_{p2} \\
 R_p &= \frac{R_{p1} \cdot R_{p2}}{R_{p1} + R_{p2}} \\
 \operatorname{tg} \delta &= \frac{R_{p1} + R_{p2}}{\omega (C_{p1} + C_{p2}) R_{p1} R_{p2}} = \frac{C_{p1}}{C_{p1} + C_{p2}} \cdot \frac{1}{\omega C_{p1} R_{p1}} + \frac{C_{p2}}{C_{p1} + C_{p2}} \cdot \frac{1}{\omega C_{p2} R_{p2}} \\
 \operatorname{tg} \delta &= \frac{C_{p1}}{C_{p1} + C_{p2}} \cdot \operatorname{tg} \delta_1 + \frac{C_{p2}}{C_{p1} + C_{p2}} \cdot \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\operatorname{tg} \delta_1}{1 + \frac{C_{p2}}{C_{p1}}} + \frac{\operatorname{tg} \delta_2}{1 + \frac{C_{p1}}{C_{p2}}} \\
 \operatorname{tg} \delta &= \frac{\operatorname{tg} \delta_1}{1 + y \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} + \frac{\operatorname{tg} \delta_2}{1 + y \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}, \text{ gde je } y = \frac{x}{1-x}
 \end{aligned}$$

Zadatak 6.10

Ekvivalentna električna šema jednog kondenzatora prikazana je na slici. Smatrajući da C, R i R₁ ne zavise od učestanosti, izvesti izraz za tangens ugla gubitaka u kondenzatoru i pokazati da je njegova



minimalna vrednost $(tg\delta)_{\min} = \frac{2R_1}{R} \sqrt{\frac{R}{R_1} + 1}$.

REŠENJE

$$Z_1 = R_1 + \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = R_1 + \frac{R}{1 + j\omega CR} = R_1 + \frac{R(1 - j\omega CR)}{1 + (\omega CR)^2} \quad (6.10.1)$$

$$Z_1 = R_1 + \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} - j \frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2} \quad (6.10.2)$$

$$Z_2 = R_e - j \frac{1}{\omega C_e}, \quad R_e = R_1 + \frac{R}{1 + (\omega CR)^2}, \quad \frac{1}{\omega C_e} = \frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2}, \quad \omega C_e = \frac{1 + (\omega CR)^2}{\omega CR^2} \quad (6.10.3)$$

$$tg\delta = \omega C_e R_e = \frac{1 + (\omega CR)^2}{\omega CR^2} \left(R_1 + \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} \right) = \frac{1 + (\omega CR)^2}{\omega CR^2} R_1 + \frac{1}{\omega CR} \quad (6.10.4)$$

$$tg\delta = \frac{1}{\omega CR} + \omega CR_1 + \frac{R_1}{\omega CR^2} \quad (6.10.5)$$

Pri uslovu $\frac{1}{\omega CR} = \omega CR_1$ dobija se $tg\delta = \frac{1}{\omega CR} + \omega CR_1 + \frac{\omega CR_1^2}{R}$

$$\frac{d(tg\delta)}{d\omega} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\omega^2 CR} + CR_1 + \frac{CR_1^2}{R} = 0 \quad (6.10.6)$$

$$\omega = \frac{1}{R_1 C \sqrt{1 + \frac{R}{R_1}}} \quad (6.10.7)$$

$$\frac{d^2(tg\delta)}{d\omega^2} > 0 \quad (6.10.8)$$

$$(tg\delta)_{\min} = \omega CR_1 \left[1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R - R_1} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R}{R_1}}} \left[2 + 2 \frac{R_1}{R} \right] = 2 \cdot \frac{1 + \frac{R_1}{R}}{\sqrt{1 + \frac{R}{R_1}}}$$

$$(tg\delta)_{\min} = \frac{2R_1}{R} \cdot \frac{R + R_1}{\sqrt{R_1(R + R_1)}} = \frac{2R_1}{R} \cdot \sqrt{\frac{R}{R_1} + 1}$$

Zadatak 6.11

Naći optimalne temperature T_{1opt} i T_{2opt} koje odgovaraju minimalnoj temperaturnoj promeni kapacitivnosti (osetljivosti) redne veze dva pločasta kondenzatora C_1 i C_2 istih površina i istog međusobnog rastojanja obloga, koji rade u nekom uređaju na temperaturama T_1 i T_2 , respektivno, ako je $T_2 - T_1 = \text{const.} = 40^\circ\text{C}$, a T_1 može da varira od 10°C do 40°C .

Smatrati da temperaturne promene kapacitivnosti potiču samo od temperaturnih promena dielektričnih konstanti ε_1 i ε_2 feroelektrika koji su upotrebljeni kao dielektrici u kondenzatorima

$$\varepsilon_1 = 4,43 \cdot (2T + 1) \cdot 10^{-10} \text{ F/m}$$

$$\varepsilon_2 = 4,43 \cdot (130 - T) \cdot 10^{-10} \text{ F/m}$$

Gde je T temperatura u $^\circ\text{C}$.

Koliko puta je ekvivalentna kapacitivnost ovako redno vezanih kondenzatora na optimalnim temperaturama veća od ekvivalentne kapacitivnosti pri $T_1 = 20^\circ\text{C}$?

REŠENJE

$$C_1(T_1) = \frac{S}{d} \varepsilon_1(T_1) = 4,43 \cdot (2T_1 + 1) \frac{S}{d} \cdot 10^{-10} \text{ F} \quad (6.11.1)$$

$$C_2(T_2) = \frac{S}{d} \varepsilon_2(T_2) = 4,43 \cdot (130 - T_2) \frac{S}{d} \cdot 10^{-10} = 4,43 \cdot (130 - T_1 - \Delta T) \cdot 10^{-10} \text{ F} \quad (6.11.2)$$

Gde su T_1 temperatura u $^\circ\text{C}$, S površina u m^2 i d u metrima.

$$C_e(T_1) = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{(2T_1 + 1) \cdot (130 - T_1 - \Delta T) \cdot \left(\frac{S}{d} \cdot 4,43 \cdot 10^{-10}\right)^2}{\frac{S}{d} \cdot 4,43 \cdot 10^{-10} (2T_1 + 1 + 130 - T_1 - \Delta T)} \quad (6.11.3)$$

$$C_e(T_1) = \frac{S}{d} \cdot 4,43 \cdot 10^{-10} \frac{(2T_1 + 1) \cdot (130 - T_1 - \Delta T)}{(2T_1 + 1) + (130 - T_1 - \Delta T)} = A \frac{-2T_1^2 + 179T_1 + 90}{T_1 + 91} \quad (6.11.4)$$

$$\frac{dC_e(T_1)}{dT_1} = A \frac{(-4T_1 + 179)(T_1 + 91) - (-2T_1^2 + 179T_1 + 90)}{(T_1 + 91)^2} \quad (6.11.5)$$

Iz uslova $\frac{dC_e(T_1)}{dT_1} = 0$ dobijamo sledeću jednačinu

$$(-4T_1 + 179)(T_1 + 91) - (-2T_1^2 + 179T_1 + 90) = -2T_1^2 - 364T_1 + 16199 = 0 \quad (6.11.6)$$

$$T_1^2 + 182T_1 - 8099,5 = 0 \quad (6.11.7)$$

$$T_{1/2} = -91 \pm \sqrt{8281 + 8099,5} = -91 \pm 127,986 \quad (6.11.8)$$

Pošto po prirodi zadatka rešenje mora biti pozitivno ($T_1 \geq 10^\circ\text{C}$), dobija se $T_{1opt} = 36,986 \approx 37^\circ\text{C}$ i $T_{2opt} \approx 77^\circ\text{C}$

$$\frac{C_e(T_{1opt})}{C_e(20^\circ\text{C})} = \frac{\frac{-2 \cdot 37^2 + 179 \cdot 37 + 90}{37 + 91}}{\frac{-2 \cdot 20^2 + 179 \cdot 20 + 90}{20 + 91}} = 1,205789 \approx 1,2 \quad (6.11.9)$$

Zadatak 6.12

Proračunati dimenzije specijalnog kondenzatora od 80pF sa cilindričnim oblogama (dužinu obloga L i spoljni prečnik unutrašnjeg cilindra – obloge D_1) tako da mu probojni napon U_{kr} bude što veći, ako je unutrašnji prečnik spoljašnjeg cilindra – obloge $D_2=100\text{mm}$ i ako je dielektrična čvrstoća dielektrika $K_{kr}=200\text{kV/cm}$, a relativna dielektrična konstanta $\epsilon_r=10$.

Određiti vrednost probojnog napona U_{pr} i efektivnu vrednost radnog napona U_r , ako je koeficijent sigurnosti 4.

REŠENJE

Obrazac za kapacitivnost cilindričnog kondenzatora je

$$C = \frac{\epsilon \cdot 2\pi L}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (6.12.1)$$

Po zakonima elektrostatičke je

$$Q = CU = \int_S \bar{D} dS = \epsilon \cdot K \cdot 2\pi r L, \text{ gde je } r_1 \leq r \leq r_2, D_1=2r_1, D_2=2r_2 \quad (6.12.2)$$

Iz (6.12.2) se dobija

$$K = \frac{CU}{2\pi\epsilon L} \cdot \frac{1}{r}, \quad K_{\max} = \frac{CU}{2\pi\epsilon L} \cdot \frac{1}{r_1} \quad (6.12.3)$$

Ako se (6.12.1) smeni u (6.12.3)

$$K_{\max} = \frac{U}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \text{ili} \quad U_{kr} = K_{kr} \cdot r_1 \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (6.12.4)$$

Iz uslova $\frac{\partial U_{kr}}{\partial r_1} = 0$ dobija se maksimalno U_{kr} .

$$\frac{\partial U_{kr}}{\partial r_1} = K_{kr} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} - K_{kr} r_1 \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_1^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{r_2}{r_1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_2}{r_1} = e \quad (6.12.5)$$

$$U_{kr \max} = K_{kr} \cdot r_1 \quad (6.12.6)$$

$$D_1 = \frac{D_2}{e} = \frac{100}{e} = 3,68 \text{ cm} \quad (6.12.7)$$

Iz (6.12.1) se dobija

$$l = \frac{C}{2\pi\epsilon} = \frac{80 \cdot 10^{-12}}{2\pi \cdot 10 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}} = 14,4 \text{ cm} \quad (6.12.8)$$

Dakle, $2r_1=36,8 \text{ mm}$, $l=144 \text{ mm}$

Iz (6.12.6) nalazimo U_{kr}

$$U_{kr \max} = K_{kr} \cdot r_1 = 200 \cdot \frac{3,68}{2} = 368 \text{ kV} \quad (6.12.9)$$

$$U_r = \frac{U_{kr}}{4\sqrt{2}} = 65,25 \text{ kV} \quad (6.12.10)$$

$$U_{kr} = \frac{U_{kr \max}}{4,5\sqrt{2}} = 59 \text{ kV} \quad (6.12.11)$$

U nekom radio-aparatu upotrebljen je trimmer za dodatno podešavanje rezonantne učestanosti (1MHz) u kolu.

Zadatak 6.13

Zavrtnjem za regulaciju kapacitivnosti prečnika 4mm menja se razmak između obloga kondenzatora do $d_{\max}=1\text{mm}$. Za nepokretnu ploču kondenzatora lepljen je keramički sloj debljine 0,5mm, relativne dielektrične konstante $\epsilon_{kr}=10$ i služi, pored ostalog, i kao dielektrik kondenzatora. Ploče kondenzatora su pravougaonog oblika, dimenzija $10 \times 12\text{mm}^2$

a) Naći ekstremne kapacitivnosti ovog trimera, kao i kapacitivnost stalnog kondenzatora u rezonantnom kolu, ako se vezivanjem ovog trimera može odstraniti relativno odstupanje frekvencije od 5%.

b) Naći tangens ugla gubitaka trimera u funkciji hoda zavrtnja, smatrajući da su gubici u vazduhu zanemarljivi, a u keramici da iznose $\text{tg}\delta_k=4 \cdot 10^{-4}$ i nacrtati ovu zavisnost.

REŠENJE

a)

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \frac{S}{d} \quad (6.13.1)$$

$$C_{\max} = \epsilon_{kr} \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d_{\min}} = \epsilon_{kr} \epsilon_0 \cdot \frac{la - \frac{\pi d^2}{4}}{d_{\min}} = 19,037214 \text{ pF} \quad (6.13.2)$$

$$C_{\min} = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{\frac{d_{\min} + d_1}{\epsilon_{kr}} + \frac{d_1}{\epsilon_{0r}}} = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{\frac{d_{\min}}{\epsilon_{kr}} \left(1 + \frac{d_1}{d_{\min}} \frac{\epsilon_{kr}}{\epsilon_{0r}} \right)} = \frac{C_{\max}}{1 + \frac{d_1}{d_{\min}} \frac{\epsilon_{kr}}{\epsilon_{0r}}} \quad (6.13.3)$$

$$d_1 = 1 \text{ mm} - d_{\min} = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ mm}$$

$$\frac{d_1}{d_{\min}} = 1; \quad \frac{\epsilon_{kr}}{\epsilon_{0r}} = \frac{10}{1} = 10 \quad (6.13.4)$$

$$C_{\min} = \frac{C_{\max}}{1 + 10} = 1,730658 \text{ pF} \quad (6.13.5)$$

$$f_{\text{rez}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (6.13.6)$$

$$f_{\text{rez}} + \Delta f = \frac{1}{1 - \frac{\Delta f}{f}} = \frac{1}{1 - 0,05} \quad (6.13.7)$$

$$f'_{\text{rez}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C + C_{\max})}} \quad (6.13.8)$$

$$1,05 = \sqrt{1 + \frac{C_{\max}}{C}} \quad (6.13.9)$$

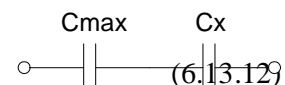
$$\frac{f_{\text{rez}}}{f'_{\text{rez}}} = \frac{\sqrt{C + C_{\max}}}{\sqrt{C}} = \sqrt{1 + \frac{C_{\max}}{C}} \quad (6.13.10)$$

$$C = \frac{C_{\max}}{1,05^2 - 1} \quad (6.13.11)$$

$$C = 185,729162 \text{ pF}$$

b) Odgovarajuće ekvivalentno kolo trimera bi bilo kao na slici.

$$\text{tg}\delta = \omega RC = \omega R \cdot \frac{C_x C_{\max}}{C_x + C_{\max}} = \text{tg}\delta_k \cdot \frac{C_x}{C_x + C_{\max}}$$



$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \delta_k}{1 + \frac{C_{\max}}{C_x}} \quad (6.13.13)$$

$$C_x = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} \quad (6.13.14)$$

$$C_{x\max} = \varepsilon_0 \varepsilon_{kr} \frac{S}{d_1} \quad (6.13.15)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \delta_k}{1 + \frac{\varepsilon_{kr}}{\varepsilon_0} \frac{x}{d_1}} = \frac{\operatorname{tg} \delta_k}{1 + \frac{10}{d_1} x} = \frac{\operatorname{tg} \delta_k}{1 + 20x} \quad (6.13.16)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{4 \cdot 10^4}{1 + 20x}, \quad x \text{ je u mm} \quad (6.13.17)$$

x [mm]	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
tgδ [$\cdot 10^{-4}$]	2	1,333	1	0,8	0,666	0,571	0,5	0,44	0,4

$$f = \frac{k}{\sqrt{C}} \quad (6.13.18)$$

$$\frac{df}{dC} = -\frac{1}{2} \frac{k}{C\sqrt{C}} = -\frac{1}{2} \frac{f}{C} \quad (6.13.19)$$

$$\frac{df}{f} = -\frac{1}{2} \frac{dC}{C} \quad (6.13.20)$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \left| \frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C} \right| \quad (6.13.21)$$

$$0,05 = \frac{1}{2} \frac{C_{\max} - C_{\min}}{C} \quad (6.13.22)$$

$$C = 10 \cdot (C_{\max} - C_{\min}) = 173 \text{ pF} \quad (6.13.23)$$

7 Elektronska kola

Od posebnog interesa je izučavanje uticaja performansi elektronskih komponenata na rad elektronskih kola. Ova analiza je dvosmerna. Svojstva komponenti ponekad određuju ne samo performanse nego i topologiju elektronskog kola dok sa druge strane zahtevane performanse elektronskih kola nameću kriterijume za izbor komponenti u kolu. Ova interakcija nažalost ne vodi ka idealnom rešenju već se procesom sukcesivnih aproksimacija performanse kola dovode do željenog nivoa uz pokušaj da se koriste komponente minimalnog kvaliteta čime se olakšava proces proizvodnje. Iterativni postupak kojim se vrši razrada kola zahteva određeno iskustvo kako bi se izbegla potencijalna propagacija pogrešene aproksimacije kroz proces i smanjilo vreme potrebno za postizanje rešenja.

Smisao ove glave je da ilustruje ovaj proces u pokušaju da prenese metodu i tehnike kojima se služimo u razradi elektronskih kola na čitaoca i omogući mu da stečenim znanjem sagleda ulogu performansi elektronskih komponenata u ukupnim performansama elektronskog kola.

Zadatak 7.1 Kompenzacija temperaturske zavisnosti otpornosti

Posmatrati dva otpornika vezana na red, poznatih vrednosti R_1 i R_2 na temperaturi T_0 i poznatih temperaturskih koeficijenata otpornosti $TCR_1=\alpha_1$ i $TCR_2=\alpha_2$. Izvesti izraz za ukupnu otpornost u funkciji temperature i uslov za potpunu kompenzaciju temperature. Takodje izvesti izraz za ukupnu ovako temperaturski kompenzovanu otpornost. Smatrati da se oba otpornika u svakom trenutku nalaze na istoj temperaturi.

Rešenje – Razlika u temperaturi otpornika i temperaturi na kojoj su otpornosti poznate daje se obrascem

$$\Delta T = T - T_0 \quad (7.1.1)$$

Ukupna otpornost dva redno vezana otpornika i njena zavisnost od temperature može se napisati u formi

$$R(T) = R_1(T) + R_2(T) = R_{10} [1 + \alpha_1 \Delta T] + R_{20} [1 + \alpha_2 \Delta T] = R_{10} + R_{20} + \Delta T [R_{10} \alpha_1 + R_{20} \alpha_2] \quad (7.1.2)$$

Prvi i drugi član zbira u jednačini (7.1.2) ne zavise od temperature već samo zavisi treći član. Uslov za potpunu kompenzaciju temperature može se dobiti kao

$$\Delta T [R_{10} \alpha_1 + R_{20} \alpha_2] = 0 \quad (7.1.3)$$

Iz jednačine (7.1.3) sledi da se potpuna temperaturska kompenzacija ostvaruje pri uslovu

$$R_{10} \alpha_1 = -R_{20} \alpha_2 \quad (7.1.4)$$

Iz jednačine (7.1.4) sledi

$$\frac{R_{10}}{R_{20}} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = k \quad (7.1.5)$$

što je ujedno i uslov potpune temperaturske kompenzacije.

Kao su R_{10} i R_{20} pozitivne veličine, to sledi da temperaturski koeficijenti otpornosti α_1 i α_2 moraju biti suprotnog znaka.

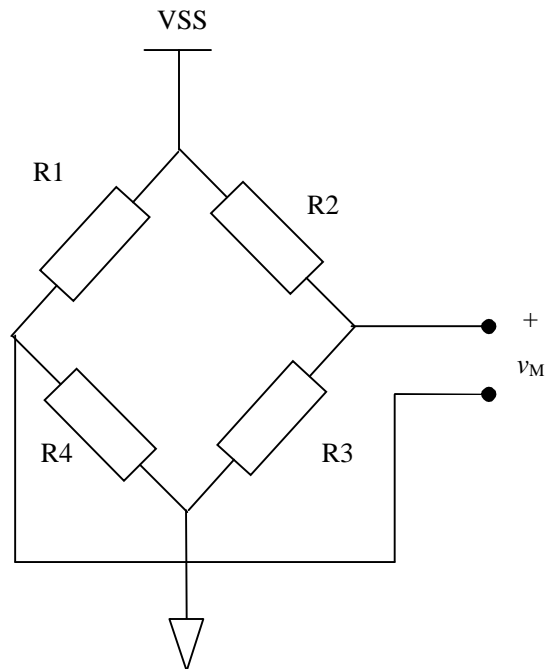
Ukupna otpornost ovakve veze može se izračunati kao

$$R = R_{10} [1 + \alpha_1 \Delta T] + R_{20} [1 - k \alpha_1 \Delta T] = R_{10} + R_{20} = R_{20} (k + 1) = R_{10} \left(\frac{1}{k} + 1 \right) \quad (7.1.6)$$

Iz jednačine (7.1.6) sledi da se ukupna otpornost temperaturski kompenzovane redne veze formira izborom otpornosti jednog od dva otpornika na sobnoj temperaturi i faktora k koji zavisi od karakteristike materijala i konstantan je.

Zadatak 7.2 Merni most sa mernim trakama

Na slici 7.1 je prikazana realizacija mernog sistema za merenje sile na bazi mernih traka (*strain gage or strain gauge*) u vidu mernog mosta (*Wheatston bridge*). Napajanje mosta predstavljeno je generatorom VSS koji generiše konstantan napon napajanja bez ograničenja izlazne struje. Most je realizovan sa 4 otporna elementa od kojih 1 ili više (čak i sva 4) mogu biti senzorski elementi (elementi čija otpornost zavisi od vrednosti merne veličine).



7.1. Merni most sa mernim trakama

Jednostavna realizacija podrazumeva jednu mernu traku (na poziciji R_1) i 3 fiksna otpornika postavljena na pozicije R_2 , R_3 i R_4 . Merenje se izvodi merenjem napona v_M .

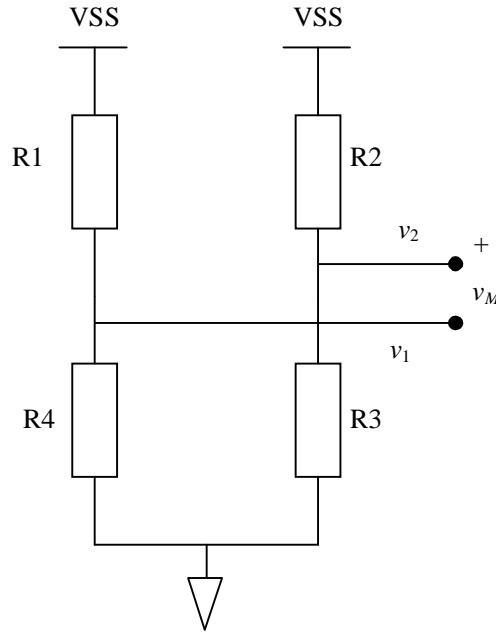
Izvesti izraz za prenosnu karakteristiku $v_M = f_M(R_1, R_2, R_3, R_4) = v_M/V_{SS}$

Analizirati uticaj tolerancije otpornosti svih otpornih elemenata u kolu na prenosnu karakteristiku

Analizirati uticaj temperaturskog koeficijenta otpornosti (TCR) na prenosnu karakteristiku

Analizirati uticaj šuma svih rezistivnih elementat u kolu i izračunati amplitudski odnos signal/šum (v_M/v_n). Za proračun šuma smatrati da je propusni opseg signala v_M ograničen sa gornje strane idealnim film niskopropusnikom granične frekvencije f_g .

Rešenje – Merni most se može posmatrati kao sklop od dva razdelnika napona (7.2) gde se napon v_M uzima kao razlika napona izmedju tačaka v_2 i v_1 .



7.2. Merni most kao razdelnik napona

Pisanjem jednačina za razdelnike napona dobijaju se sledeće relacije

$$v_2 = V_{SS} \frac{R_3}{R_2 + R_3}, v_1 = V_{SS} \frac{R_4}{R_1 + R_4} \quad (7.2.1)$$

Iz (1) se dobija sledeća relacija za izlazni napon relacija

$$v_M = v_2 - v_1 = V_{SS} \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3} - \frac{R_4}{R_1 + R_4} \right) = V_{SS} \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)} \quad (7.2.2)$$

Karakteristika prenosa mosta f_M se često daje u bezdimenzionoj formi kao

$$f_M(R_1, R_2, R_3, R_4) = \frac{v_M}{V_{SS}} = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)} \quad (7.2.3)$$

Merni most se može realizovati sa jednim, dva, tri ili četiri merna elementa. Radi jednostavnosti, posmatraće se slučaj kada je samo jedan element mosta merna traka, a ostala tri elementa su fiksne otpornosti. Ovim se ne gubi na opštosti analize pošto se merne trake reprezentuju u ekvivalentnom električnom modelu mosta kao otpornosti. U daljem tekstu zadatka smatraće se da je merna traka postavljena na mesto R_1 .

Posmatranjem jednačine (7.2.3) može se uočiti specijalan slučaj koji se odnosi na situaciju $R_1=R_2=R_3=R_4$ u kojoj se dobija jednačina karakteristike prenosa tzv. balansiranog mosta. U tom slučaju kada je merna veličina jednaka nuli, izlazni je napon v_M jednak nuli. Promena vrednosti merne veličine dovodi do promene vrednosti R_1 pa se menja i vrednost izlaznog napona i samim tim vrednost f_M .

U daljem tekstu zadatka smatraće se da se koristi balansirana konfiguracija mosta, pošto ona za nultu vrednost merne veličine proizvodi nulti izlazni napon (nema ofseta). Pošto se zahteva analiza uticaja šuma, tolerancije i temperaturske karakteristike otpornika na izlaz mosta, a kako sve ove pojave imaju malu amplitudu u odnosu na jednosmerne komponente napona koji se javljaju na mostu (V_1, V_2), od interesa je pronaći parcijalni izvod f_M u funkciji otpornosti. Potom se mogu traženi efekti iskazati kao totalni priraštaj f_M . Takođe, lakše je diferencirati odvojene karakteristike prenosa razdelnika napona nego integralni izraz za f_M .

$$\Delta f_M = \Delta f_2 - \Delta f_1 \quad (7.2.4)$$

gde su

$$f_2 = \frac{v_2}{V_{SS}} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad f_1 = \frac{v_1}{V_{SS}} = \frac{R_4}{R_1 + R_4} \quad (7.2.5)$$

Stoga se može pisati

$$\frac{\delta f_2}{\delta R_2} = -\frac{R_3}{(R_2 + R_3)^2}, \quad \frac{\delta f_2}{\delta R_3} = \frac{R_2}{(R_2 + R_3)^2}, \quad \frac{\delta f_1}{\delta R_1} = -\frac{R_4}{(R_1 + R_4)^2}, \quad \frac{\delta f_1}{\delta R_4} = +\frac{R_1}{(R_1 + R_4)^2} \quad (7.2.6)$$

Sada se totalan priraštaj karakteristike prenosa mosta u funkciji pojedinačnih priraštaja otpornosti može iskazati kao

$$df_M = -\frac{\delta f_2}{\delta R_2} dR_2 + \frac{\delta f_2}{\delta R_3} dR_3 + \frac{\delta f_1}{\delta R_1} dR_1 - \frac{\delta f_1}{\delta R_4} dR_4 =$$

$$-\frac{R_3 dR_2}{(R_2 + R_3)^2} + \frac{R_2 dR_3}{(R_2 + R_3)^2} - \frac{R_4 dR_1}{(R_1 + R_4)^2} + \frac{R_1 dR_4}{(R_1 + R_4)^2} \quad (7.2.7)$$

Ako se sa ΔR_i obeleži razlika vrednosti i -te otpornosti usled tolerancije, u slučaju balansirano mosta (7.2.7) se pogodno može uprostiti kao

$$\Delta f_M = -\frac{\Delta R_2}{4R} + \frac{\Delta R_3}{4R} - \frac{\Delta R_1}{4R} + \frac{\Delta R_4}{4R} \quad (7.2.8)$$

Sada se može pokazati uticaj tolerancije otpornika u mostu na karakteristiku prenosa mosta tako što se uzima najgori slučaj, u kome se razlike otpornosti usled tolerancije sabiraju

$$f_{MTOL} = \left| -\frac{\Delta R_{TOL}}{4R_{nom}} \right| + \left| \frac{\Delta R_{TOL}}{4R_{nom}} \right| + \left| \frac{\Delta R_{TOL}}{4R_{nom}} \right| + \left| -\frac{\Delta R_{TOL}}{4R_{nom}} \right| = \frac{\Delta R_{TOL}}{R_{nom}} = k_{TOL} \quad (7.2.9)$$

Sa k_{TOL} je obeležena tolerancija otpornika, sa ΔR_{TOL} je obeležena apsolutna vrednost razlike otpornog elementa usled tolerancije (jednaka je za svaki otporni element) a sa R_{nom} je obeležena nominalna vrednost otpornosti. Iz (7.2.9) i (7.2.3) sledi da je jednosmerni napon V_{MO} koji je prisutan na mostu u odsustvu merne veličine (tzv. napon ofseta)

$$V_{MO} = f_{MTOL} V_{SS} = k_{TOL} V_{SS} \quad (7.2.10)$$

Za slučaj upotrebe otpornika tolerancije od 0.1% i napona mosta od 10V, sledi da postoje 10 mV napona na izlazu mosta kada je vrednost merne veličine nula, tj. kada nema pobude! Ovo predstavlja ozbiljan problem za realizaciju mosta u serijskoj proizvodnji. Situacija je ista kada se koristi i više mernih traka u mostu, jer i njihove tolerancije učestvuju na isti način kao i tolerancije fiksnih otpornika. Iz ovog razloga se moraju koristiti skupi otpornici jako visoke tačnosti, ili se mora izvršiti balansiranje mosta za svaki pojedinačni most. Ovo se postiže podešavanjem jedne od otpornosti (naravno ne merne trake, nego fiksne otpornosti umesto koje se stavlja promenljivi otpornik) tako da napon mosta bude nula u odsustvu pobude, ili oduzimanjem napona koji je izmeren u odsustvu pobude od napona mosta.

Uticaj tolerancije otpornosti na nagib karakteristike prenosa mosta može se oceniti analizom nagiba karakteristike mosta

$$f'_M = \frac{\delta f_1}{\delta R_1} = -\frac{R_4}{(R_1 + R_4)^2} \quad (7.2.11)$$

Kada se uključi tolerancija $k_{TOL} = \Delta R/R > 0$ za sve otpornike u balansirano mostu u jednačini (7.2.11) za jedan od dva moguća najgora slučaja ima se

$$f'_{MTOL1} = -\frac{R(1 - k_{TOL})}{[R(1 + k_{TOL}) + R(1 - k_{TOL})]^2} = -\frac{1 - k_{TOL}}{4R} \quad (7.2.12)$$

Sada se relativna promena nagiba karakteristike prenosa mosta usled tolerancije može iskazati kao

$$\left| \frac{f'_{MTOL1} - f'_M}{f'_M} \right| = \left| \frac{-\frac{1 - k_{TOL}}{4R} + \frac{1}{4R}}{-\frac{1}{4R}} \right| = k_{TOL} \quad (7.2.13)$$

U drugom najgorem slučaju ima se

$$f'_{MTOL2} = \frac{R(1 + k_{TOL})}{[R(1 - k_{TOL}) + R(1 + k_{TOL})]^2} = \frac{1 + k_{TOL}}{4R} \quad (7.2.14)$$

Relativna promena nagiba usled tolerancije za drugi najgori slučaj sa se može iskazati kao

$$\left| \frac{f'_{MTOL2} - f'_M}{f'_M} \right| = \left| \frac{\frac{1+k_{TOL}}{4R} - \frac{1}{4R}}{\frac{1}{4R}} \right| = k_{TOL} \quad (7.2.15)$$

U oba slučaja relativna greška nagiba karakteristike prenosa mosta usled tolerancije otpornosti u mostu jednaka je toleranciji otpornika.

Uticao temperature na balansirani most se dobija analizom jednačine (7.2.8). Naime, pošto se svi otporni elementi nalaze fizički blizu i disipiraju istu toplotu (snage na otpornim elementima su iste), oni se nalazi na istoj temperaturi. Ako otporni elementi imaju isti temperaturski koeficijent otpornosti onda se promene otpornosti elemenata usled temperature medjusobno potiru. Stoga se može zaključiti da je most inherentno temperaturski kompenzovan. Praktična iskustva nažalost pokazuju suprotno, pošto se TCR pojedinih otpornika razlikuju, a takodje i TCR merne trake postavljene na most nije isti kao TCR upotrebljenih fiksnih otpornosti. Postoje medjutim metode kompenzacije koje koriste ovo inherentno svojstvo mosta i pored merne instaliraju i jednu kompenzacionu traku koja nije napregnuta ali se nalazi na istoj temperaturi kao i merna traka. Promena otpornosti merne trake usled promene temperature se kompenzuje istom promenom otpornosti kompenzacione trake koja se nalazi u drugoj grani mosta.

U otpornicima su dominantna dva izvora šuma. Prvi je termički ili Džonsonov šum a drugi je fliker šum. Napon termičkog šuma na otporniku dat je obrascem

$$v_T = \sqrt{4kTR\Delta f} \quad (7.2.16)$$

k je Bolcmanova konstanta (1.38×10^{-23} J/K)

T je apsolutna temperatura tela otpornika

Δf je frekvencijski opseg

Prema tekstu zadatka, smatra se da je $\Delta f = f_g$, pošto je u pitanju idealni filter niskopropusnik koji filtrira signal na samom mostu. Naravno, ovo je samo praktična aproksimacija, u praksi se na most vezuje pojačavač koji nema idealnu frekvencijsku karakteristiku.

Drugi izvor šuma je fliker šum čiji se napon daje sa obrascem

$$v_F = k_F \frac{V_{DC}}{\sqrt{f}} \quad (7.2.17)$$

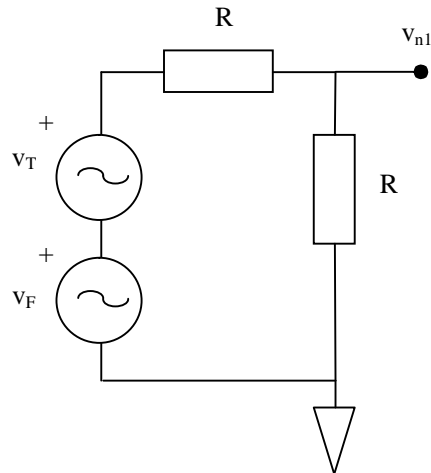
U praksi se ovaj šum specificira preko indeksa šuma NI , preko koga se može izračunati fliker šum kao:

$$v_F = V_{DC} NI \sqrt{\log \frac{f_g}{f_d}} \quad (7.2.18)$$

Problem svakako predstavlja vrednost donje granice frekvencijskog opsega f_d , čija nulta vrednost onemogućava proračun fliker šuma. U praksi se koristi vrednost $10 \mu\text{Hz}$ (što otprilike odgovara periodu trajanja jedan dan) za f_d . Ova aproksimacija pretvara izraz (7.2.18) u

$$v_F = V_{DC} NI \sqrt{\log 10^5 f_g} \quad (7.2.19)$$

Za slučaj balansiranog mosta, svi otporni elementi imaju jednak i fliker i termički šum, tako da je dovoljno uraditi analizu za jedna otporni element. Dodatno, merna traka ima manji fliker šum od fiksnih otpornika, ali isti termički šum. Stoga se tretman i merne trake u kolu kao fiksnog otpornika može uzeti kao najgori slučaj. Ekvivalentna električna šema kola mernog mosta za mali signal sa prikazanim generatorima šuma za jedan otporni element ima formu kao na slici dole. Ova šema dobijena je zamenom svih generatora jednosmernog napona (u ovom slučaju samo V_{SS}) simbolom mase



Generator v_T predstavlja izvor termičkog šuma svakog pojedinog otpornog elementa u mernom mostu a generator v_F je izvor fliker šuma svakog pojedinog otpornog elementa u mostu. Svaki otporni element doprinosi svojim šumom u razdeljenoj tački naponskog razdelnika v_{n1} (most se posmatra kao dva naponska razdelnika) na isti način, tako da se može smatrati da prikazana šema predstavlja $1/4$ ukupnog izvora šuma u mostu. Jedan par otpornih elemenata (R_1 i R_4) formira napon šuma v_{n1} u svom razdelniku, a drugi par (R_2 i R_3) formira napon šuma v_{n2} u drugom razdelniku. Pošto su svi izvori šuma nezavisni međusobno, nema korelacije između njih, pa se ukupna efektivna vrednost šuma u nekoj tački dobija kao koren iz sume kvadrata vrednosti šuma u toj tački koji potiču iz svih izvora šuma. Dodatno, primenjuje se princip superpozicije tako da se prvo u tački od interesa računa šum koji potiče od termičkog šuma pa potom šum u toj tački koji potiče od fliker šuma, pa se efektivne vrednosti opet sabiraju kao koren iz sume kvadrata.

Efektivna vrednost šuma u tački v_{n1} se računa kao

$$v_{n1} = \sqrt{2 \left(\frac{v_T}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{v_F}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{v_T^2}{2} + \frac{v_F^2}{2}} \quad (7.2.20)$$

Faktor 2 u levoj strani jednačine (7.2.20) potiče od činjenice da u tački v_{n1} šum potiče od otpornika R_1 i od otpornika R_2 , tako da zbir ispod korena ima 4 člana, dva od dva fizička različita izvora termičkog i dva od dva fizička različita izvora fliker šuma.

Šum u tačkama v_{n1} i v_{n2} je iako istog intenziteta zbog simetrije mosta, međusobno nekorelisan, pa se ukupna efektivna vrednost šuma u razlici napona na mostu v_M može se napisati kao

$$v_n = \sqrt{2 \frac{v_T^2}{2} + 2 \frac{v_F^2}{2}} = \sqrt{v_T^2 + v_F^2} \quad (7.2.21)$$

Dakle, ukupan šum u naponu v_M koji smo obeležili sa v_n ima pogodnu osobinu da se čini kao da potiče samo od jednog otpornog elementa!

Kada se u iskaz (7.2.21) smene izrazi (7.2.16) i (7.2.19) i primeti da je jednosmerni napon na otpornom elementu $V_{DC} = V_{SS}/2$ dobija se sledeći izraz

$$v_n = \sqrt{4kTRf_g + \frac{V_{SS}^2}{4} NI^2 \log 10^5 f_g} \quad (7.2.22)$$

Pogodna je prilika da se diskutuje o dominantnosti šuma imajući u vidu da se otpornost otpornih traka, pa samim tim i gornji limi otpornih elemenata u mostu, kreće do $1k\Omega$, te da se frekvencijski opseg merenja (f_g) može smatrati manjim od 10 Hz (u pitanju su spore mehaničke promene), a indeks šuma NI je oko $0.01\mu V/V$, može se zaključiti da dominira fliker šum. Za date vrednosti na $T=300K$ i pri $V_{SS}=10V$ termički šum iznosi $1.656 \cdot 10^{-16} V^2$, dok fliker šum iznosi $1.5 \cdot 10^{-14} V^2$ i značajno dominira (oko 90 puta je veći). Pri manjim vrednostima otpornosti u mostu, što je čest slučaj, fliker šum još više dominira. Stoga se (16) može aproksimirati sa

$$v_n \cong \frac{V_{SS}}{2} NI \sqrt{\log 10^5 f_g} = 123nV \quad (7.2.23)$$

Procena odnosa signal/šum proizilazi iz svojstva mernih traka da se relativna promena njihova otpornosti kreće oko 1% pri maksimalnoj pobudi, pa se za izabrano $V_{SS}=10V$ i simetričan most iz relacije (7.2.2) može napisati

$$v_M = V_{SS} \frac{(R + dR_1)R - R^2}{4R^2} = V_{SS} \frac{1}{4} \frac{dR_1}{R} = 10V \frac{0.01}{4} = 25mV \quad (7.2.24)$$

Sa dR_1 je obeležena promena otpornosti merne trake usled istežanja (dejstva pobude).

Sada se odnos signal šum može iskazati kao

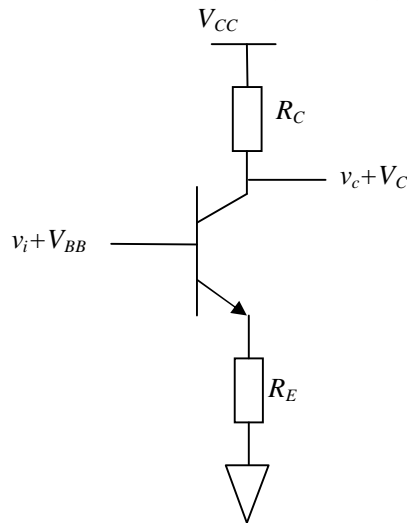
$$SNR = \frac{S}{N} = \frac{v_M}{v_n} = \frac{dR_1}{R} \frac{1}{2NI\sqrt{\log 10^6}} = \frac{25mV}{123nV} \cong 200000 \cong 106dB \quad (7.2.25)$$

što predstavlja jako dobar SNR. Treba primetiti da SNR ne zavisi od V_{SS} već samo od relativne promene otpornosti merne trake, propusnog opsega i indeksa šuma otpornih elemenata. Povećanje V_{SS} ne popravlja odnos SNR već samo povećava disipaciju u kolu. Ovo opet povećava temperaturu otpornosti i termički šum. Sa druge strane, elektromagnetska interferencija kao posledica prisustva EM polja u okruženju, dovodi do indukcije struja u vodovima kola i pojave „šuma“ na izlazu kola koji nije pravi šum ali nije ni deterministička veličina. Ova pojava ne zavisi od V_{SS} ali pošto koristan signal na izlazu mosta zavisi od V_{SS} to se velika vrednost napona napajanja mosta često koristi.

Zadatak 7.3 Uticaj parametara otpornika na pojačavač sa zajedničkim emiterom

Analizirati uticaj tolerancija otpornika na tačnost zadate vrednosti pojačanja za naizmenični signal u propusnom opsegu za pojačavač sa zajedničkim emiterom. Poznati su g_m tranzistora koji pojačava signal i vrednosti kolektorske i emitorske otpornosti. Smatrati da je tranzistor ispravno polarizovan i da kontinuirano radi u direktnom aktivnom režimu. Za konkretan primer uzeti slučaj $g_m=40$ mS, $R_E=1$ k Ω , $R_C=10$ k Ω .

Rešenje – Konfiguracija iz teksta zadatka nacrtana je na donjoj slici.



7.1. Pojačavač sa zajedničkim emiterom

Na slici su uobičajene polarizacione komponente zamenjene sa generatorom napona V_{BB} na koji je superponiran ulazni signal v_i . Izlazni signal ima jednosmernu komponentu V_C i naizmeniču komponentu v_c koja je pojačana replika ulaznog signala. Pojačanje se iskazuje obrascem

$$\left| \frac{v_c}{v_i} \right| = a_{v0} = \left| -\frac{g_m R_C}{1 + g_m R_E} \right| \quad (7.3.1)$$

Zadata vrednost pojačanja obeležava se sa a_{v0} koja bi se dobila kada bi otpornici bili bez greške tolerancije i imali tačne zadate vrednosti R_C i R_E . Izraz za pojačanje sa realnim otpornicima a_v ima formu

$$a_v = \frac{g_m R_C (1 + k_C)}{1 + g_m R_E (1 + k_E)} \quad (7.3.2)$$

Sa k_C i k_E su obeležene tolerancije kolektorskog i emitorskog otpornika respektivno. Opšti slučaj podrazumeva da se tolerancije jednake, pri čemu je najgori slučaj kada vrednost imenioca opada usled tolerancije a brojioca raste ili suprotno. Ako pretpostavimo da se tolerancija iskazuje pozitivnim brojem

$$k = k_E = k_R > 0 \quad (7.3.3)$$

a da je njen uticaj određen prethodnom rečenicom kao najgorim slučajevima onda se može prva opcija formalizovati sa

$$a_v = \frac{g_m R_C (1 + k)}{1 + g_m R_E (1 - k)} \quad (7.3.4)$$

Drugi najgori slučaj (kada pojačanje opada usled tolerancije) dobija se iz (7.3.2) u formi

$$a_v = \frac{g_m R_C (1 - k)}{1 + g_m R_E (1 + k)} \quad (7.3.5)$$

Razlika pojačanja i projektovanog pojačanja usled tolerancije za prvi najgori slučaj, sada se iskazuje kao

$$da_v = a_v - a_{v0} = \frac{g_m R_C (1+k)}{1+g_m R_E (1-k)} - \frac{g_m R_C}{1+g_m R_E} = \frac{k g_m R_C (1+2g_m R_C)}{(1+g_m R_E)[1+g_m R_E (1-k)]} \quad (7.3.6)$$

Relativna greška pojačanja usled tolerancije može se iskazati kao

$$\left| \frac{da_v}{a_{v0}} \right| = \delta a_v = k \frac{1+2g_m R_E}{1+g_m R_E (1-k)} \quad (7.3.7)$$

Obrazac (7.3.7) pokazuje da relativna promena pojačanja usled tolerancije ne zavisi od R_C . Od interesa je pronaći odnos relativne promene pojačanja i tolerancije otpornika

$$\frac{\delta a_v}{k} = k_a = \frac{1+2g_m R_E}{1+g_m R_E (1-k)} \quad (7.3.8)$$

Sada se k_a može nazvati tolerancija pojačanja.

Obrazac (7.3.8) dozvoljava analizu ovog odnosa za konkretne vrednosti parametara kola. Smenom vrednosti iz teksta zadatka u (7.3.8) dobija se

$$k_a = \frac{81}{1+40(1-k)} \quad (7.3.9)$$

Kako je $k \ll 1$, to se dobija da je $k_a = 1.93$, što nije zanemarljivo i znači da je relativna greška pojačanja usled tolerancije otpornika 2 puta veća od tolerancije. Za slučaj kada je $k=1\%$, dobija se da je $k_a=2\%$. Stoga se preporučuje upotreba otpornika sa boljom tolerancijom.

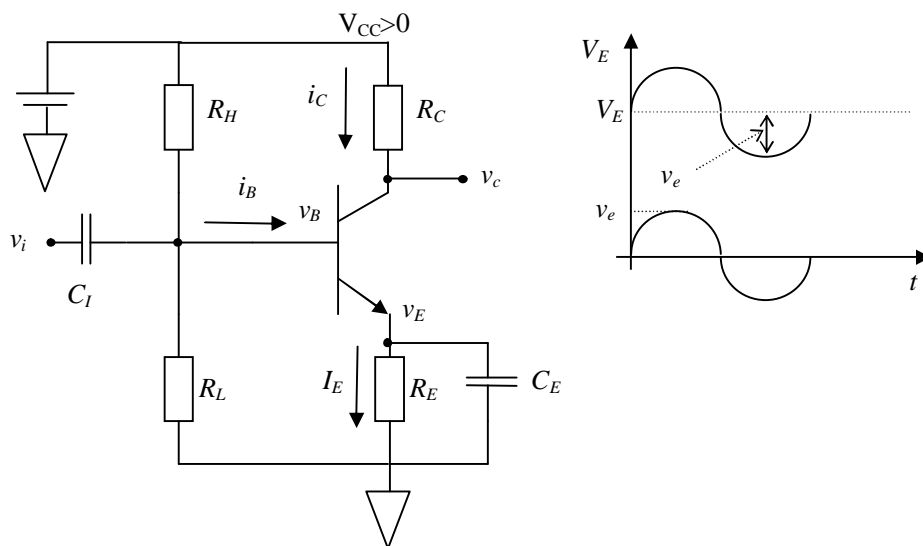
Pogled na (7.3.8) upućuje da se možda može optimizovati izraz za k_a u funkciji R_E , pa bi se eventualno pojačavač projektovao prema optimalnoj vrednosti otpornika u emiteru. Analizom se dobija

$$\frac{\delta k_a}{\delta R_E} = \frac{g_m (1+k)}{[1+g_m R_E (1-k)]^2} > 0 \quad (7.3.10)$$

Nažalost, prisutna monotonost ukazuje da je potrebno smanjiti R_E što je više moguće, uzimajući u vidu ostale parametre kao što su distorzija signala i pošnja kola, kao i potencijalno visoka vrednost za kondenzator u emiteru koji određuje donju granicu propusnog opsega pojačavačkog stepena. Smanjenje uticaja tolerancije na pojačanje se oseća kada vrednost proizvoda $g_m R_E$ padne do oko 1, što u konkretnom zadatku povlači da je $R_E = 25\Omega$.

Zadatak 7.4 Polarizacija pojačavača sa zajedničkim emiterom

Proces konstruisanja elektronskih pojačavača koji koriste diskretni bipolarni tranzistor (BJT) kao pojačavački element zahteva dovodjenje tranzistora u režim rada koji omogućava traženo, dobro definisano, linearno i stabilno pojačanje, na koje promena temperature i protok vremena ne utiču u značajnoj meri. Osnovni problem leži u električnim karakteristikama BJT-a koji je nelinearan pojačavački element i zahteva da vrednosti napona i struja njegovih terminala leže unutar definisanog skupa vrednosti kako bi se moglo ostvariti pojačanje. Konkretno, reč je o održavanju tranzistora u direktnom aktivnom režimu (DAR), što zahteva direktnu polarizaciju BE spoja i inverznu polarizaciju BC spoja. Ovaj uslov mora biti ispunjen u svakom trenutku, i kada se na ulaz pojačavača dovede signal koji treba pojačati. Pozicioniranje vrednosti napona i struja kroz tranzistor kada ulazni signal nije prisutan a koje omogućavaju da se prilikom priključenja ulaznog signala tranzistor sve vreme nalazi u DAR-u, zove se polarizacija, ili definisanje mirne radne tačke (MRT). Na slici 7.1 prikazan je pojačavač sa zajedničkim emiterom sa otpornikom u emiteru (tzv. degenerišući otpornik), kao jedna od više mogućim kombinacija za definisanje stabilne MRT.

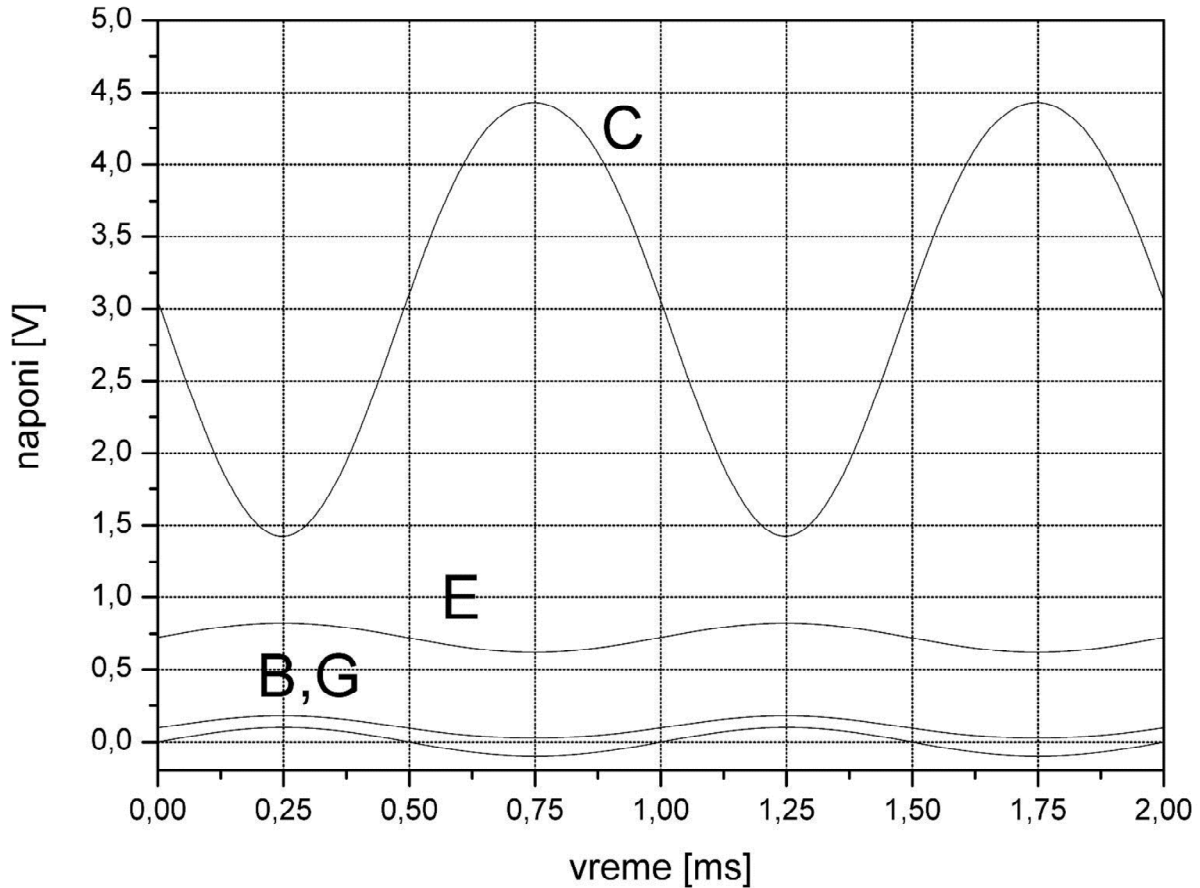


7.1. Pojačavač sa zajedničkim emiterom sa otpornikom u emiteru

Na slici 7.2 prikazani su grafici napona u funkciji vremena i to napon generatora v_i (G), napon baze v_B (B), napon emitera v_E (E) i napon kolektora v_C (C). Treba primetiti da su napon generatora, baze i emitera u fazi a da je napon kolektora koji je u stvari pojačan signal u protivfazi, pošto je ovo invertujuć pojačavač koji ima negativnu vrednost pojačanja. Kolektorska i emitorska struja koje su približno jednake osciluju sa istim oblikom kao napon emitera (E). Logika prenosa signala naponom kroz pojačavačke sisteme koja je prirodno dominantan način razmišljanja ne sme biti prepreka za uočavanje ključne činjenice, a to je talasni oblik kolektorske struje. U linearnim sistemima, sinusoidalna pobuda pojačavača zahteva simetričnu promenu napona na izlazu oko MRT, što zahteva simetričnu promenu kolektorske struje, pošto je promena napona na kolektoru proizvod kolektorske otpornosti i promene kolektorske struje.

Na ulazu u pojačavač prisutan je kondenzator C_I čija je uloga da „spregne“ napon sa generatora v_i koji osciluje oko 0V sa bazom tranzistora gde signal treba da osciluje oko nekog pozitivnog napona određenog polarizacijom.

Pojačavač čiji signali su na grafiku se napaja sa 5V, a vrednosti otpornika su $R_L=19K$, $R_H=100K$, $R_C=2K7$ i $R_E=100$. Tranzistor je 2N2222. Uticaj opterećenja koje unose potrošač (kolo vezano na tačku v_C) i unutrašnje otpornosti generatora se zanemaruju.



7.2. Naponi - CE pojačavač sa otpornikom u emiteru

Standardna notacija koja se koristi za obeležavanje totalnih (velikih ili trenutnih) vrednosti, vrednosti malog signala (korisnog signala) i jednosmernih vrednosti podrazumeva upotrebu malog slova u indeksu za mali signal, velikog slova za veliki signal, a velikim početnim slovom se obeležava jednosmerna vrednost veličine. Notacija važi za struje i napone. Na primer, emitterski napon (veliki signal, totalni signal, trenutna vrednost kolektorskog napona) v_E se sastoji od dve komponente, jednosmerne komponente V_E , i komponente malog signala v_e

$$v_E = V_E + v_e \quad (7.4.1)$$

Razrešenje problema slova koje imaju istu formu u malom i velikom pismu dolazi sa godinama iskustva.

Moguće je bez pisanja jednačina, samo intuitivnom analizom, zaključiti koji je mehanizam odgovoran za stabilizaciju MRT. U slučaju da zbog porasta temperature poraste β_F tranzistora, došlo bi do porasta kolektorske ali i emitorske struje. Porast emitorske struje dovodi do porasta napona emitera tranzistora, što prouzrokuje smanjenje napona V_{BE} . Smanjivanje ovog napona dovodi do smanjenja kolektorske struje prema jednačini (7.4.2) koja opisuje karakteristiku prenosa bipolarnog tranzistora u direktnom aktivnom režimu.

$$i_C = I_S e^{\frac{v_{BE}}{V_T}} \quad (7.4.2)$$

MRT tranzistora podrazumeva vrednost jednosmernog napona CE spoja i jednosmerne struje kroz kolektor (V_{CE}, I_C), koje se po engleskom nazivu polarizacije (*quiescent point*) obeležavaju sa (V_{CEQ}, I_{CQ})= (V_C, I_C) . Vrednost I_{CQ} ima suštinski uticaj pošto određuje pojačanje korisnog signala (mali signal, engl. *small signal*):

$$\frac{v_c}{v_i} = a_v = -\frac{g_m R_C}{1 + g_m Z_E} = -\frac{\frac{I_C}{V_T} R_C}{1 + \frac{I_C}{V_T} Z_E}, \quad (7.4.3)$$

gde je sa V_T obeležen termalni napon

$$V_T = \frac{kT}{q} = 26mV (T = 300K), \quad (7.4.4)$$

k je Bolcmanova konstanta, T je aspolutna temperatura a q naelektrisanje elektrona, a Z_E predstavlja impedansu paralelne veze otpornika i kondenzatora u emiteru. Vrednost V_{CE} ne utiče značajno na električne porometre pojačavača ali utiče na vrednosti parazitnih kapacitivnost tranzistora u modelu za mali signal, što je od značaja tek pri visokim frekvencijama, pa se stoga neće uzimati u dalje razmatranje.

U izrazu (7.4.3) imenilac smanjuje pojačanje u odnosu na maksimalno moguće $g_m R_C$. Ovaj se problem može rešiti za slučaj pojačavanja naizmeničnog signala povezivanjem kondenzatora C_E u paraleli sa otpornikom R_E . Potrebno je da moduo impedanse koju formiraju ove dve komponente ima zanemarljivu vrednost čime se omogućava put emitorske struje na frekvencijama na kojima se želi veliko pojačanje direktno u masu. Na frekvencijama od interesa u formuli (7.4.3) $Z_E \approx 0$ pa se ima

$$a_v = -g_m R_C = -\frac{I_C}{V_T} R_C \quad (7.4.5)$$

Treba primetiti da u (7.4.5) figuriše apsolutna temperatura T preko termalnog napona V_T što demonstrira zavisnost pojačanja od temperature. Čak i u slučajevima kada bi kolektorska struja bila postavljena u MRT nekim mehanizmom koji nije osetljiv na temperaturu, i dalje bi pojačanje ispoljavalo zavisnost od temperature.

Uklanjanje emitorskog kondenzatora daje izraz za pojačanje

$$\frac{v_c}{v_i} = a_v = -\frac{g_m R_C}{1 + g_m R_E} = -\frac{\frac{I_C}{V_T} R_C}{1 + \frac{I_C}{V_T} R_E} \quad (7.4.6)$$

U izrazu (7.4.6) ova zavisnost je blaža zbog prisustva V_T u imeniocu kao i u brojiocu. Dodatno, ukoliko važi uslov

$$g_m R_E \gg 1 \quad (7.4.7)$$

tada se izraz (7.4.6) transformiše u

$$a_v = -\frac{R_C}{R_E} \Rightarrow |a_v| = \frac{R_C}{R_E} \quad (7.4.8)$$

i sada pojačanje ne zavisi od I_C i V_T , što znači da ne zavisi od pozicije MRT ili temperature! Uslov (7.4.7) se lako zadovoljava jer se može transformisati u

$$I_C R_E \gg V_T \quad (7.4.9)$$

a to je uslov koji se lako ispunjava jer se uvek može odvojiti nekoliko stotina milivolti pada napona na emitorskom otporniku radi stabilizacije MRT i pojačanja. U praksi se (7.4.9) svodi na

$$I_C R_E > 10V_T = 260mV \quad (7.4.10)$$

što znači da je minimalna vrednost emitterskog otpornika 270Ω iz reda E12.

Dakle, uvođenje degenerišućeg otpornika R_E ima izuzetno pozitivan uticaj na stabilnost MRT i pojačanja po cenu smanjenja modula pojačanja. Ova cena i nije tako velika imajući u vidu pozitivne efekte.

7.4.1. Distorzije kod pojačavača sa kondenzatorom u emiteru

Najveća moguće amplituda na izlazi CE stepena ostvariva je bez emitterskog otpornika i svakako ne može biti veća od

$$v_{c\max} = \Delta v_{ce\max} = \frac{V_{CC}}{2} \quad (7.4.11)$$

Ispunjavanje uslova maksimalne amplitude znači da mora važiti

$$v_{c\max} = I_C R_C = V_C \quad (7.4.12)$$

pošto se napon kolektora u MRT mora nalaziti najmanje za maksimalnu amplitudu izlaznog napona ispod napona napajanja V_{CC} . Kako je sa druge strane pojačanje dato sa (7.4.5) odatle sledi da je maksimalna amplituda na ulazu u CE stepena jednaka termalnom naponu V_T .

$$v_{b\max} = v_{be\max} = \frac{v_{c\max}}{a_v} = \frac{I_C R_C}{g_m R_C} = \frac{I_C R_C}{V_T} = V_T \quad (7.4.13)$$

Problem nastaje zbog činjenice da BJT nije linearan uređaj, već da kolektorska struja kao i varijacija kolektorskog napona zavise eksponencijalno od napona v_{be} prema formuli (7.4.2). Stoga pri dovoljno velikim vrednostima napona v_{be} dolazi do nelinearne distorzije signala (pojave harmonika) što se ne sme dozvoliti. Procena vrednosti napona pri kojoj dolazi do distorzije može se izvršiti počevši baš od jednačine (7.4.2), razvojem iste u Tejlorov red u tački $i_C = I_C$. Po definiciji Tejlorov red ima formu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!} \quad (7.4.14)$$

Primenom definicije Tejlorovog reda na (7.4.2) dobija se

$$i_C(v_{BE}) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_S e^{\frac{v_{BE0}}{V_T}} \cdot \frac{1}{n! V_T^n} \cdot (v_{BE} - v_{BE0})^n \quad (7.4.15)$$

Logično je usvojiti da se razvoj u red vrši oko tačke $v_{BE0} = V_{BE}$ (napon v_{BE} u MRT). Razlika trenutne vrednosti napona v_{BE} i V_{BE} je v_{be} (oscilacija napona između baze i emitera koja je mala po amplitudi i predstavlja signal koji treba pojačati). Naravno, prvi član iza sume je u stvari kolektorska struja u MRT, pa se ima

$$i_C(v_{BE}) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_C \cdot \frac{v_{be}^n}{n! V_T^n} \quad (7.4.16)$$

Sada je jasno da pri v_{be} koje je po veličini poredivo sa V_T , mogu nastati harmonici kao posledica podizanja na n-ti stepen funkcije $v_{be}(t)$ koja predstavlja vremenski oblik ulaznog napona. Ovo je nepoželjna pojava, koja se zanemarljivo ispoljava ako su svi članovi reda za $n > 2$ zanemarljivi u odnosu na $n=1$. Intuitivno je jasno da v_{be} mora biti mnogo manje od V_T kako bi ovo važilo.

Dakle, pojačavač maksimalnog pojačanja može pojačavati samo vrlo male signale, reda nekoliko mV, bez uticaja distorzije.

Sa druge strane, pojačavač sa emitterskim otpornikom ispoljava manju distorziju zbog efekta negativne reakcije preko emitterskog otpornika.

7.4.2. Proces razrade CE stepena sa degenerišućim otpornikom

Proces dizajniranja pojačavačkog stepena ne počiva na pisanju jednačina za jednosmerne struje i napone i rešavanja istih uz određena ograničenja već se zasniva na iskustvenim elementima, određenim pravilima u aproksimiranju vrednosti električnih veličina i poznavanju ograničenja električnih komponenata. Na primer, moguće je dobiti rešenje kola koje podrazumeva da neki od otpornika ima vrednost van standardnih

vrednosti, što znači da se taj otpornik mora realizovati kao redno paralelna veza više otpornika ili kao potenciometra. Ovo bi značajno poskupilo proces izrade i predstavlja nepotrebnu komplikaciju, koja donosi male koristi za uloženi trud.

Postoje dva ključna momenta u procesu razrade koji ograničavaju moguće izbore vrednosti komponenata. Prvi je naponsko ograničenje na izlazu stepena a drugi je optimalna vrednost kolektorske struje sa stanovišta performansi tranzistora.

Za zadatu vrednost pojačanja a_v , transformacijom formule (7.4.6) zbog uslova (7.4.9), može se pokazati da odnos kolektorskog i emitorskog otpornika zadovoljava

$$\frac{R_C}{R_E} = |a_v| \quad (7.4.17)$$

Uslov maksimalne amplitude signala na izlazu stepena (v_c) je svakako da se kolektorska tačka (V_C) nalazi na sredini vrednosti između napona napajanja V_{CC} i minimalne vrednosti koja dozvoljava da BJT ostane u DAR-u, što je vrednost baznog napona u tački kada je napon kolektora najniži. Praktično napon na kolektoru može pasti i za napon provodjenja PN spoja $V_{\gamma}=0.2$ V u odnosu na napon baze a da tranzistor ostane u DAR-u, ali je to isuviše mali dobitak da bi se nepotrebno zakomplikovao račun.

Pogled na sliku 7.2 otkriva da u toj tački napon na emiteru dostiže najveću vrednost, te da se napon kolektora i emitera „sustižu“, što se ne sme dogoditi. Sa druge strane, u tački najveće vrednosti kolektorskog napona, može se desiti da napon kolektora „probije“ napon napajanja V_{CC} . Drugi uslov znači da mora važiti da se MRT kolektora nalazi na

$$V_C = V_{CC} - v_{c\max}, \quad (7.4.18)$$

dok prvi uslov zahteva

$$V_{CC} - 2v_{c\max} = V_E + v_{e\max} + V_{BE} \quad (7.4.19)$$

Sa $v_{c\max}$ je obeležana maksimalna amplituda kolektorskih oscilacija, sa $v_{e\max}$ maksimalna amplituda emitorskih oscilacija a sa V_C , V_{BE} , i V_E su obeleženi naponi elektroda tranzistora u MRT.

Slučaj sinusoidalne pobude i maksimalne amplitude signala na izlazu podrazumeva maksimalnu oscilaciju kolektorske (i emitorske struje), od nulte vrednosti do $2I_C$. Maksimalne amplitude emitorskih i kolektorskih oscilacija su stoga proizvodi oscilacije kolektorske struje

$$v_{c\max} = i_c R_C = I_C R_C \quad (7.4.20)$$

$$v_{e\max} = i_e R_E \approx i_c R_C = I_C R_C$$

Uvodjenem (7.4.20) u (7.4.19) dobija se

$$V_{CC} - 2I_C R_C = V_E + I_C R_E + V_{BE} \quad (7.4.21)$$

odakle sledi ključan uslov

$$V_{CC} - V_E - V_{BE} = I_C (2R_C + R_E) \quad (7.4.22)$$

Dakle u slučaju simetrične pobude (sinusoidalne ili pak nekog drugog simetričnog talasnog oblika) uslov maksimalne amplitude izlaznih oscilacija unosi ograničenje u izbor otpornosti kolektora i emitera.

Najčešće je vrednost kolektorske struje u MRT ograničena optimalnom zonom za β_F koja ima centar na oko 1mA. Stoga se određuju otpornosti kako bi se zadovoljio ovaj uslov a dozvoljeno je da I_C u konačnom rešenju malo varira od idealnih 1mA zbog toga što postoje ograničenja za vrednosti otpornosti unutar E redova vrednosti.

Dakle iz (7.4.22) sledi

$$\frac{V_{CC} - V_E - V_{BE}}{I_C} = (2R_C + R_E) \Rightarrow \frac{V_{CC} - V_E - V_{BE}}{I_C R_E} = \left(2 \frac{R_C}{R_E} + 1 \right) \quad (7.4.23)$$

Uz aproksimaciju jednakosti kolektorske i emitorske struje i uslova (7.4.8) dobija se

$$\frac{V_{CC} - V_E - V_{BE}}{V_E} = (2|a_v| + 1) \quad (7.4.24)$$

Dakle, za zadatu pojačanje, zadatu vrednost napona napajanje i naravno poznat napon baza emiter u MRT, sledi vrednost za napon emitera u MRT.

$$\frac{V_{CC} - V_{BE}}{(2|a_v| + 2)} = V_E \quad (7.4.25)$$

Prema izračunatoj vrednosti za V_E određuje se vrednost emitterskog otpornika R_E najbliža vrednosti iz E reda tako da struje I_C približno iznosi optimalnih 1mA.

7.4.3. Minimalni napon napajanja

Zanimljivo je sada u (7.4.25) uključiti uslov (7.4.10) za koji smo primetili da se lako ispunjava.

$$\frac{V_{CC} - V_{BE}}{(2|a_v| + 2)} > 10V_T \quad (7.4.26)$$

Odakle sledi da napona napajanja ograničava maksimalno moguće pojačanje ili da je za postizanje pojačanja potreban generator napajanja napona većeg od neke minimalne vrednosti.

$$V_{CC\min} = 10V_T(2|a_v| + 2) + V_{BE}$$

$$\frac{V_{CC} - V_{BE}}{10V_T} - 2 \quad (7.4.27)$$

$$|a_v\max| = \frac{2}{2}$$

Konkretno, pojačavač pojačanja 10 zahtevao bi napon napajanja od najmanje 6.1V.

Sada postaje jasno zašto je teško konstruisati pojačava velikog pojačanja koji ne zavisi od temperature a radi sa malim naponom napajanja (na primer jedna baterija od 1.5V).

7.4.4. Formiranje polarizacije baze

Odredjivanje vrednosti otpornika u emiteru prema (7.4.25) određuje praktično i napon baze uz uslova da se kolektorska struja u MRT pozicionira na optimalnu vrednost.

$$V_B = V_E + V_{BE} \approx I_C R_E + V_{BE} \Rightarrow I_C \approx \frac{V_B - V_{BE}}{R_E} \quad (7.4.28)$$

Otpornički razdelnik R_L i R_H određuje bazni napon. Treba primetiti da kroz R_H teče i bazna struja, međjutim ukoliko se odaberu dovoljno male vrednosti za ove otpornika tako da struja kroz njih bude veća od struje baze, ona se može zanemariti. U praksi, za tranzistore za mali signal, to je ispunjeno, jer su β_F ovih tranzistora reda od 100 pa do nekoliko stotina, što uz poziciju optimalne kolektorske struje znači da je struja baze reda $I_B < 10\mu A$. Dovoljno je dakle da struja kroz otpornički razdelnik ne bude manja od $100\mu A$. Uz ovaj uslov može se pisati

$$V_B = V_{CC} \frac{R_L}{R_L + R_H} \quad (7.4.29)$$

odakle se može formirati odnos

$$\frac{V_{CC} - V_B}{V_B} = \frac{R_H}{R_L} \quad (7.4.30)$$

Iako je izraz (7.4.30) jednostavan, problem je pronaći odgovarajuće vrednosti otpornosti iz zadatog E reda kojim se postiže najbliži vrednost desnog količnika vrednosti levog količnika. Ponekad je potrebno realizovati otpornike R_H i R_L kao redne ili paralelne veze više otpornika radi postizanja boljeg poklapanja vrednosti.

Dodatni uslov je da struja kroz razdelnik bude veća od neke kritične vrednosti

$$\frac{V_{CC}}{R_L + R_H} > 10 \cdot I_B = 10 \cdot \frac{I_C}{\beta_F} \quad (7.4.31)$$

Uvodjenjem otporničkog odnosa (7.4.30) u (7.4.31) dobija se

$$R_L < \frac{V_B \beta_F}{10 I_C} \quad (7.4.32)$$

što predstavlja dobru polaznu osnovu za izbor vrednosti otpornika u razdelniku.

7.4.5. Primer razrade CE stepena

Zadatak:

Razraditi CE stepen sa NPN BJT koji se napaja sa $V_{CC}=5\text{ V}$, ispoljava pojačanje za naizmenični (mali signal) od $a_v > 5$ uz uslov simetrične pobude i maksimalne amplitude na izlazu. Na raspolaganju su otpornici iz reda E12. Smatrati da je optimalna MRT kolektorske struje 1mA i da je $\beta_F > 100$.

Razrada:

Iz formule (7.4.25) dolazi se do napona emitera u MRT od $V_E=0,367\text{V}$. Ovaj napon ne sme biti veći od izračunatog pa se bira sledeći manji otpornik iz reda E12 od 330Ω . Traženo pojačanje preko jednačine (7.4.17) uslovljava da vrednost kolektorskog otpornika bude manja od 1650Ω , dakle bira se otpornik od 1800Ω iz reda E12.

Zbog zaokruživanja vrednosti otpornosti na red E12 moguće je da se tranzistor nadje u saturaciji što se proverava kritičnim slučajem prema jednačini (7.4.22). Naime mora važiti

$$V_{CC} - V_E - V_{BE} - I_C (2R_C + R_E) > 0 \quad (7.4.33)$$

Provera ubacivanjem brojnih vrednosti daje

$$5\text{V} - 1\text{mA} \cdot 330\Omega - 0,6\text{V} - 1\text{mA} (2 \cdot 1800\Omega + 330\Omega) = 4,07\text{V} - 1\text{mA} (3930\Omega) = 0,14\text{V} > 0 \quad (7.4.34)$$

Ostaje da se odrede otpornici za formiranje napona baze. Prema (7.4.30) sledi

$$\frac{R_H}{R_L} = \frac{5\text{V}}{0,93\text{V}} - 1 = 4,376 \quad (7.4.35)$$

Dodatni uslov iz jednačine (7.4.32) daje

$$R_L < \frac{0,93\text{V} \cdot 100}{10 \cdot 1\text{mA}} = 9\text{K}3\Omega \quad (7.4.36)$$

Sledeća manja vrednost u redu E12 je $8\text{K}2\Omega$, prvi izbor za R_L . Prema (7.4.35) R_H sada treba da iznosi 35883Ω . Naravno, ova vrednost ne postoji u E12 redu pa se može ili formirati paralelnom ili rednom kombinacijom dva otpornika iz E12 reda (npr. $33\text{K}\Omega$ i 330Ω na red) ili da se proba neka druga kombinacija za R_L . R_L se može samo smanjivati, pa tako za vrednost R_L od $2\text{K}7\Omega$ potrebno je R_H od 11815Ω što je blizu otporniku $12\text{K}\Omega$ iz reda E12. Treba proveriti uticaj odstupanja otpornika od idealne vrednosti na struju polarizacije.

Usvajaju se probne vrednosti za $R_H=12\text{K}\Omega$ i $R_L=2\text{K}7\Omega$. Iz (7.4.29) dobija se bazni napon od $V_B=0,918\text{V}$ kome prema (7.4.28) odgovara kolektorska struja od $0,965\text{mA}$, što je dovoljno blizu traženoj vrednosti, a kako je realizovana vrednost kolektorske struje manja od projektovane, ne može doći do zasićenja tranzistora.

Treba napomenuti da isterivanje velike tačnosti kolektorske struje nema puno smisla pošto vrednost V_{BE} ipak ima toleranciju. U praksi, ako je potrebno ostvariti tačno pojačanje, umesto otporničkog razdelnika stavlja se potenciometar.

Alternativno, ako se ne zahteva uslov maksimalne amplitude, ili je moguće postaviti napon napajanja na željenu vrednost, onda se kolektorski otpornik smanji, njemu se prilagodi i emitorski, kako bi se očuvalo pojačanje a ostavio dovoljan prostor da tranzistor ne saturira pri eventualno većim vrednostima kolektorske struje.

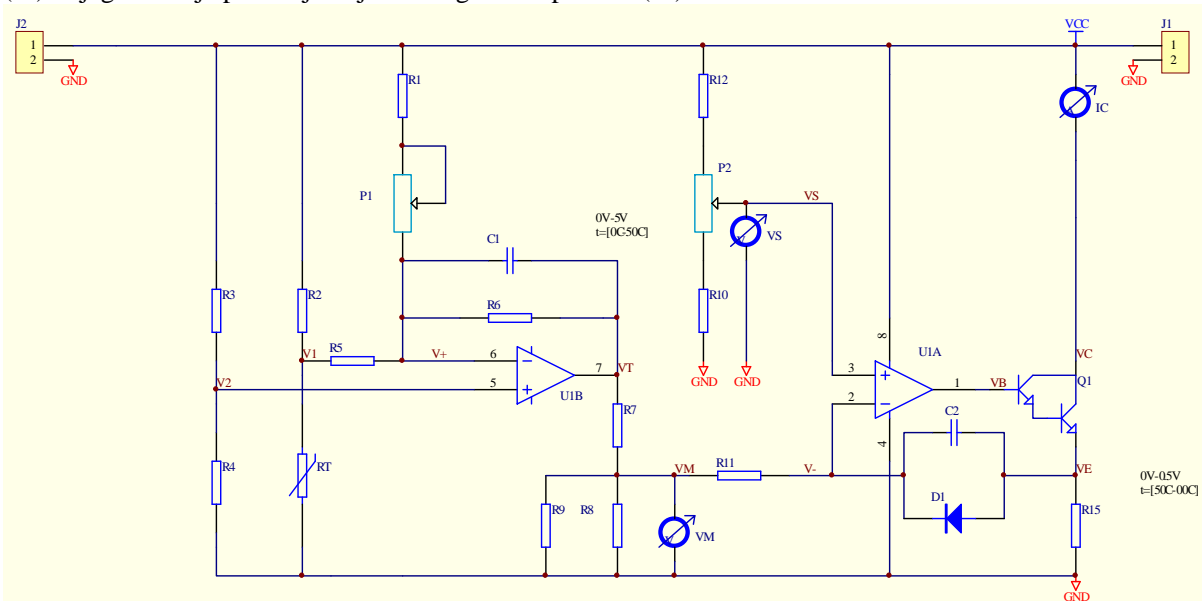
Zadatak 7.5 Regulator temperature

Uticaj temperature na električne parametre poluprovodničkih naprava može predstavljati problem, pogotovo u slučaju kada se elektronski sklop može naći u sredini gde temperatura ambijenta varira u velikom rasponu. Iako postoje tehnike koje omogućavaju značajno smanjenje uticaja temperature na rad kola, postoje situacije gde i vrlo male varijacije temperature, reda nekoliko stepeni, mogu izazvati značajnu promenu parametara. U takvim se situacijama pribegava temperaturno stabilizaciji radnog ambijenta kola, tako što se temperatura ambijenta namerno održava grejanjem iznad temperature određene klimatskim uslovima. Zagrevanje ambijenta u kome radi elektronski sklop je lakše od hladjenja istog, pošto su u pitanju male zapremine vazduha, koje se lako greju grejačima, bez potrebe za razmenjivačima toplote.

Predmet zadatka je konstrukcija elektronskog regulatora temperature (u daljem tekstu regulator) koji meri i održava približno konstantu temperaturu u svom okruženju.

7.5.1. Elektronska šema

Detaljna elektronska šema regulatora prikazana je na slici 7.1 i obuhvata dva osnovna sklopa. Prvi sklop je senzor temperature na bazi termistora (NTC) i obuhvata operacioni pojačavač U1B, termistor RT, otpornike R1-R6, kondenzator C1 i potencijometar P1. Drugi sklop je naponski kontrolisan izvor toplote (grejač) i obuhvata BJT tranzistor Q1, ampermetar IC, voltmetre VM i VS, operacioni pojačavač U1A, otpornike R7-R15, kondenzator C2, diodu D1 i potencijometar P2. Konektori J1 i J2 su predviđeni za ulaz napajanja od 5V (J1) i njegovo dalje prosledjivanje ka drugim sklopovima (J2).



7.1. Šema regulatora temperature

Senzor temperature formira napon V_T proporcionalan temperaturi u stepenima celzijusa. Ovaj napon je prva ulazna veličina u grejač. Druga ulazna veličina je željena vrednost temeprature ambijenta koja se zadaje preko napona V_S . Ova dva napona se porede i ako je napona V_T manji od napona V_S povećava se struja kroz tranzistor Q1. Povećanje struje kroz Q1 uzrokuje povećanje njegove disipacije a tako generisana toplota se preko hladnjaka na tranzistoru disipira u ambijent. Ukoliko je napon V_S manji od napona V_T postepeno se smanjuje struja kroz Q1 što dovodi do smanjenja disipacije. Temperatura ambijenta u okruženju hladnjaka tranzistora Q1 meri se preko NTC termistora RT koji je fizički prislonjen uz hladnjak. Promena otpornosti termistora usled promene temperature ambijenta menja napon V_T čime se zatvara regulatorska petlja. Ampermetar i voltmetri služe samo za praćenje ključnih napona i struja kroz kolo kako bi se stekao uvid u ponašanje kola.

Senzorski deo kola može se podeliti na dve celine. Prva je senzor temperature na bazi NTC termistora RT vezanog u merni most koji sačinjavaju otpornici R2, R3 i R4. Napon V_I opada sa porastom temperatur termistora, dok je napon V_2 konstantan. Razlika napona $V_2 - V_I$ ulazna je veličina u neinvertni pojačavač sa podešavanjem ofseta koji sačinjavaju U1B, R1, P1, R5, R6 i C1 a čija je uloga formiranje napona V_T koji je linearno proporcionalan temperaturi u stepenima celzijusa. Nagib karakteristike prenosa senzorskog kola treba da iznosi k [V/°C]. Ofset pojačavača se podešava preko R1 i P1, čime se ujedno podešava i ofset (vrednost napona V_T pri 0°C koja mora biti nula) celog senzorskog dela. Uloga kondenzatora C1 je da ograniči propusni opseg pojačavača i tako smanji ukupni šum, pošto su temperaturni procesi okarakterisani velikom vremenskom konstantom.

Analiza grejača zahteva kretanje suprotnim smerom od toka signala, što je čest slučaj kada se izvodi analiza sistema (engl. *revers engineering*). Grejno telo sačinjava tranzistor Q1 sa svojim hladnjakom. Kako je disipacija tranzistora u aktivnom režimu (DAR) praktično određena naponom v_{CE} i strujom kolektora i_C (bazna struja je mala pa se disipacija na baznoj elektrodi praktično može zanemariti), $P = v_{CE}i_C$, linearno kontrolisan grejač postiže se variranjem struje i_C ili napona v_{CE} . Lakše je varirati struju kroz tranzistor, pošto to zahteva samo promenu bazne struje, pri čemu postavljanje napona v_{CE} na fiksnu vrednost prisiljava tranzistor da radi u DAR-u. Stoga se Q1 praktično ponaša kao naponski kontrolisan strujni izvor, čije su emitera i kolektorska struja jednake struji kroz otpornik R15. Operacioni pojačavač U1A sa pratećom mrežom pasivnih elemenata služi samo da podešava bazni napon i baznu struju tako da se na otporniku R15 održava željena struja. Dakle, napon v_E određuje disipaciju tranzistora Q1 koja služi kao izvor toplote za grejanje ambijenta. Varijacija napona v_E utiče na napon v_{CE} i disipaciju, tako karakteristika grejača nije potpuno linearna. Stoga se po pravilu opseg promene napona v_E bira tako da bude zanemarljiv u odnosu na napon v_{CE} . Iz tog razloga su srednje vrednosti napona v_B i v_{CE} manje od napona napajanja.

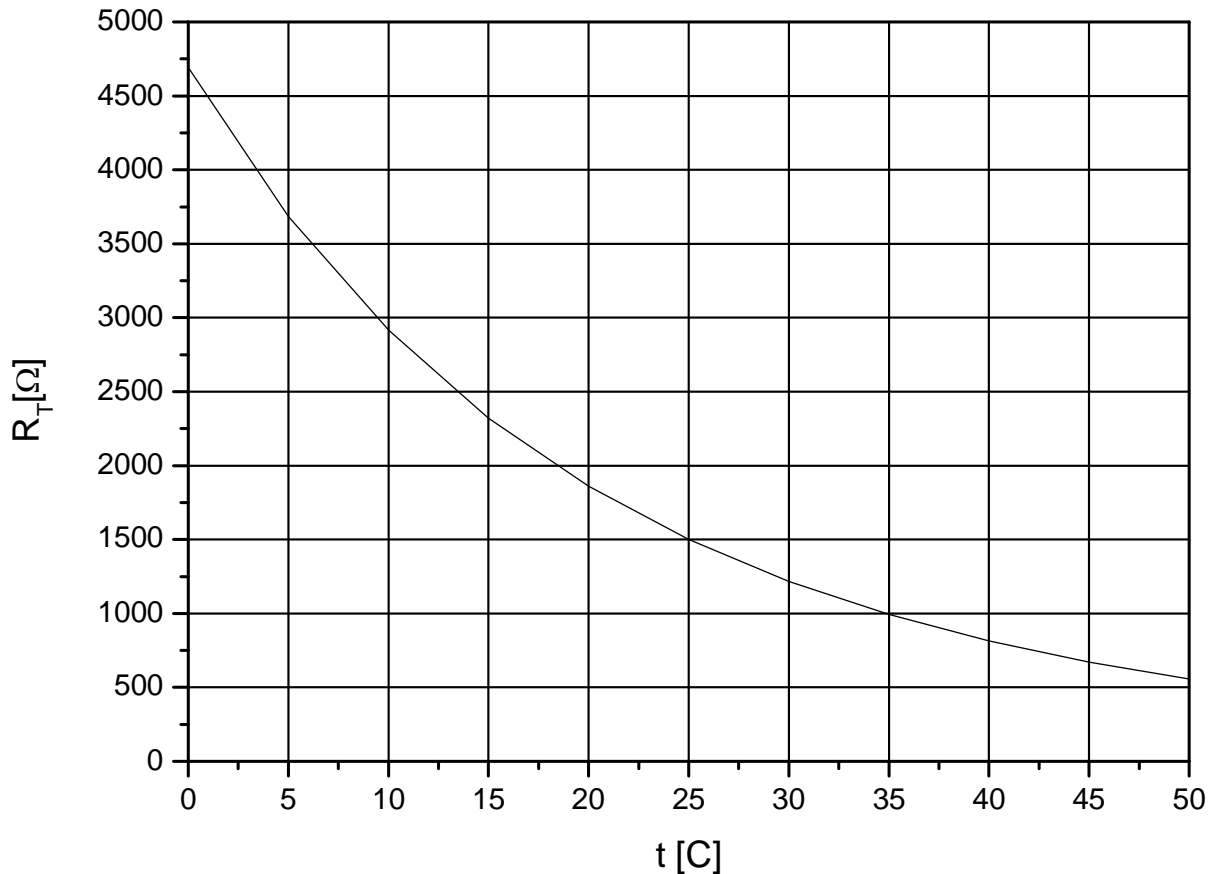
Regulator temperature je kolo sa negativnom reakcijom koje ima za cilj da održava disipaciju grejača na takvom nivou da se u nekom bliskom budućem trenutku temperatura ambijenta održi na željenoj vrednosti. Ulazna veličina u ovakvo kolo očigledno treba da bude razlika željene i trenutne temperature ambijenta, koja se u terminologiji sistema automatskog upravljanja zove još i signal ili vrednost greške. Signal greške u ovom kolu je naravno vrednost napona V_T i napona koji predstavlja željenu vrednost temperature na istoj skali kao i napon V_T . Kako je ranije rečeno, kretanje napona v_E je malo u odnosu na napon napajanja, pa je pogodno da se vrednost napona greške takodje nalazi u opsegu malih napona. Stoga se signal V_T ne koristi direktno kao element signala greške, već se preko naponskog razdelnika R7-R9 svodi na niže vrednosti napona V_M pre ulaska u regulator. Signal željene vrednosti temperature V_S dobija se preko naponskog razdelnika R10, P2 i R12. Operacioni pojačavač U1A koristi razliku napona V_S i napona V_M kao signal greške (prevodi ga u struju preko otpornika R11) i time kontroliše napon v_E . Dakle, grejač je invertujući pojačavač koji radi kao naponski kontrolisan strujni generator čiji je ulaz signal razlike temperatura a izlazna veličina disipacija tranzistora Q1.

Dalji tekst bavi se razradom pojedinih elemenata zadatka i detaljno će objasniti rad celog kola.

7.5.2. Senzor temperature

Senzor temperature generiše napon V_T koji je proporcionalan temperaturi u °C, izlazni napon je $V_{TL}=0V$ pri $t_L=0^\circ C$ a kreće se do V_{TH} pri maksimalnoj vrednosti temperature.

Kao senzor se koristi NTC termistor, model K164-1K5, firme EPCOS, koji je povezan u most koji sačinjavaju još i otpornici R2, R3 i R4. NTC ispoljava nelinearnu zavisnost otpornosti od temperature koja je prikazana na slici 7.1.

7.1. Zavisnost $R(t)$ za NTC K164-1K5

Pošto NTC ispoljava negativni temperaturski sačinilac otpornosti (otpornost opada sa temperaturom), most ispoljava inverznu karakteristiku prenosa, napon polumosta sa NTC elementom opada sa temperaturom. Nelinearna karakteristika NTC termistora može se korigovati u smeru bolje linearnosti pomoću otpornika R_2 u mostu koji se može odabrati po želji. Jedan od kriterijuma za linearizaciju NTC mosta je da napon V_I prolazi u tri tačke kroz idealnu linearnu karakteristiku, obično pri najnižoj, srednjoj i najvišoj temperaturi koja se meri. Otpornici R_3 i R_4 ne učestvuju u linearizaciji, oni formiraju konstantan napon polumosta V_2 . Izraz za napon V_I je

$$V_I(t) = V_{CC} \frac{R_T(t)}{R_T + R_2} \quad (7.5.1)$$

Uslov da napon V_I prolazi kroz tri tačke idealne linearne karakteristike u praksi znači da su razlike napona pri maksimalnoj, srednjoj i minimalnoj temperaturi jednaki

$$V_{IL} - V_{IM} = V_{IM} - V_{IH} \Rightarrow V_{IL} + V_{IH} = 2V_{IM} \quad (7.5.2)$$

V_{IL} – napon pri minimalnoj temperaturi

V_{IM} – napon pri srednjoj temperaturi

V_{IH} – napon pri maksimalnoj temperaturi

Slično se mogu usvojiti i oznake za otpornost termistora na ključnim tačkama temperaturnog opsega:

R_{TH} – otpornost termistora pri maksimalnoj temperaturi

R_{TM} – otpornost termistora pri srednjoj temperaturi

R_{TL} – otpornost termistora pri minimalnoj temperaturi

Treba primetiti da važi $V_{IL} < V_{IM} < V_{IH}$, $R_{TH} < R_{TM} < R_{TL}$.

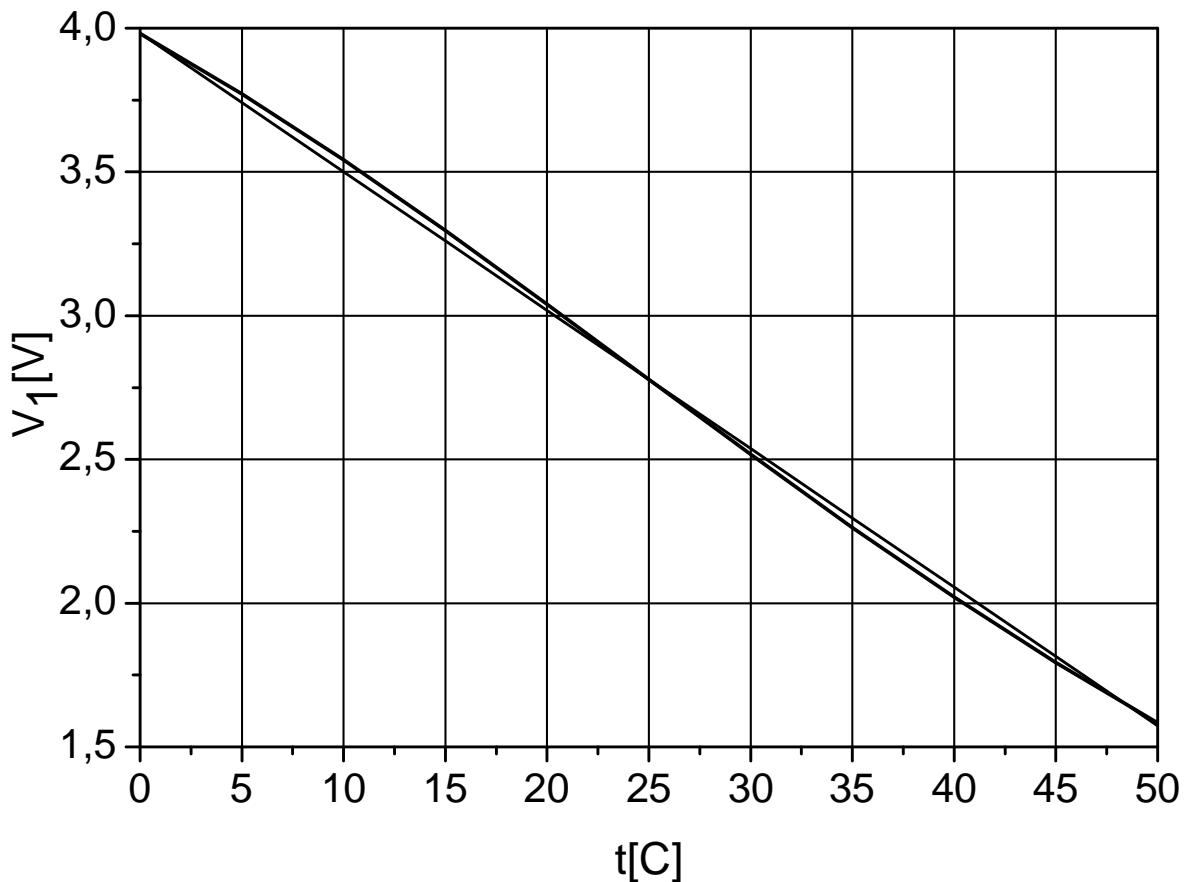
Smenom (7.5.1) u (7.5.2) ima se

$$\frac{R_{TL}}{R_{TL} + R_2} + \frac{R_{TH}}{R_{TH} + R_2} = 2 \frac{R_{TM}}{R_{TM} + R_2} \quad (7.5.3)$$

Iz jednačine (7.5.3) se dobija optimalna vrednost za otpornik R2 metodom linearizacije u tri tačke

$$R_2 = \frac{R_{TM}(R_{TH} + R_{TL}) - 2R_{TH}R_{TL}}{R_{TH} + R_{TL} - 2R_{TM}} \quad (7.5.4)$$

Očigledna simetrija doprinosu uverenju u tačnost obrasca. Vrednosti otpornosti termistora pri ekstremima temperaturnog opsega čitaju se takodje iz dokumentacije, sa grafika ili iz tabela. Ovako dobijena vrednost otpornosti na poziciji otpornika R2 praktično razrešava i ostatak mosta, pošto most mora biti simetričan, te sledi $R_3=R_2$ i $R_4=R_M$. Na slici 7.2 prikazana je zavisnost napona $V_1(t)$ u linearizovanom mostu zajedno sa idealnom linearnom karakteristikom za jednu praktičnu realizaciju senzora. Primetno je presecanje dve karakteristike u tri tačke, na krajevima i sredini opsega temperature, kako je metodom i predviđeno.



7.2. Zavisnost $V_1(t)$ linearizovanog mosta

Odstupanje linearizovane karakteristike od linearne je manje od 2% i dobar je rezultat. Nepovoljnost linearizacije ogleda se u činjenici da je nagib karakteristike $V_1(t)$ negativan, i da postoji ofset, pri nultoj temperaturi napon V_1 nije nula. Izraz za napon V_1 u funkciji temperature može se približno napisati kao

$$V_1 = V_{10} - k_1 t, V_{10} = 4V, k_1 = 0.0486V / ^\circ C \quad (7.5.5)$$

Ova svojstva napona V_1 zahtevaju korekciju kako bi se postigla željena karakteristika senzora temperature. Naravno, napon V_2 pomaže u eliminaciji ofseta, što i jeste njegova uloga u mostu, a znak i amplituda nagiba karakteristike prenosa mogu se korigovati invertujućim pojačavačem. U tu svrhu poslužiće operacioni pojačavač U1B koji sa otpornicima R5 i R6 formira inverter (kondenzator C1 ne utiče na pojačanje). Otpornik R1 i potencijometar P1 služe da zajedno sa naponom V_2 eliminišu ofset, a radi pojednostavljena jednačina njihova serijska veza biće obeležena sa R_1 .

Analiza koja počinje uslovom idealnog operacionog pojačavača (jednakost napona na + i - ulazu i ulazna struja u + i - ulaze jednaka nuli) što znači da je $V_+ = V_-$. Kirhofov zakon za struje za čvor V_+ glasi

$$\frac{V_1 - V_2}{R_5} + \frac{V_{CC} - V_2}{R_1} = \frac{V_2 - V_T}{R_6} \quad (7.5.6)$$

Odakle sledi izraz za napon V_T

$$V_T = V_2 \left(1 - \frac{R_6}{R_1} \right) - V_{CC} \frac{R_6}{R_1} - \frac{R_6}{R_5} (V_1 - V_2) \quad (7.5.7)$$

iz kojeg se vidi da izraz ima tri člana. Prva dva su konstantni, ne zavise od V_I , i služe da se postavi ofset karakteristike prenosa, tj. da pri nultoj temperaturi napon na izlazu bude nula. Drugi član zavisi od V_I i definiše nagib karakteristike prenosa senzora.

Napon V_2 je konstantan i iznosi

$$V_2 = V_{CC} \frac{R_4}{R_4 + R_3} = V_{CC} \frac{R_M}{R_M + R_2} \quad (7.5.8)$$

Formalno je moguće smenom (7.5.5) i (7.5.8) u (7.5.7) dobiti izraz iz kojeg se razbijanjem sume na članove odrede delovi koji određuju nagib i delovi koji određuju ofset, pa se rešavanje te dve jednačine nadju vrednosti otpornika. Jednostavnije je međutim stvar posmatrati iz perspektive uslova karakteristike prenosa senzora. Prvi uslov je da nagib karakteristike prenosa bude k , koji primenjen na deo jednačine (7.5.7) koji određuje nagib znači da uz uzimanje u obzir (7.5.5) mora važiti

$$\frac{R_6}{R_5} k_1 t = kt \Rightarrow \frac{R_6}{R_5} = \frac{k}{k_1} \quad (7.5.9)$$

Treba primetiti da je odnos R_5 i R_6 ovim fiksiran, i čak štaviše, pošto se mora ispoštovati uslov vrednosti iz reda otpornika E12, sledi da se R_5 i R_6 odmah odabiraju tako da formiraju najpribližniju vrednost uslova (7.5.9).

U pogledu korekcije ofseta, najjednostavnije je poći od graničnog uslova da senzor generiše $V_T=0V$ pri $0^\circ C$, što znači da se (7.5.7) može napisati kao

$$0V = V_2 \left(1 - \frac{R_6}{R_1} \right) - V_{CC} \frac{R_6}{R_1} - \frac{R_6}{R_5} (V_{IL} - V_2) \Rightarrow R_1 = \frac{(V_{CC} - V_2) R_6}{V_2 \left(1 + \frac{R_6}{R_5} \right) - \frac{R_6}{R_5} V_{IL}} \quad (7.5.10)$$

Kako su poznati svi elementi sa desne strane jednačine (7.5.10) može se izračunati vrednost zbirne otpornosti otpornika R_1 i potencijetra P_1 . Ukoliko se dobije negativna vrednost za R_1 , znači da je potrebno vezati R_1 i P_1 ka masi umesto ka V_{CC} . Realizacija otpornosti kao zbir fiksnog otpornika i potencijetra posledica je potrebe da se potencijetar koristi samo da pokrije deo opsega otpornosti koji nedostaje od najbliže manje vrednosti iz reda E12 do tačne vrednosti. Ovim se popravljaju preciznost podešavanja otpornosti preko potencijetra i tako finije podešava ofset.

Uloga kondenzatora C_1 je da ograniči propusni opseg senzora čime se smanjuje ukupni šum na izlazu. Temperaturske promene su spore, karakterišu se vremenskim konstantama u sekundama, te stoga nije potrebno da senzor ima veliki propusni opseg. C_1 utiče samo na frekvencijsku karakteristiku nagiba senzora, što se može modelirati smenom impedanse Z_6 umesto R_6 u jednačinu (7.5.9). Nagib karakteristike prenosa senzora ima sada oblik

$$k = k_1 \frac{R_6}{R_5 (1 + j\omega R_6 C_1)} \quad (7.5.11)$$

Odakle se vidi forma filtra niskopropusnika prvog reda sa vremenskom konstantom pola na $\tau_1 = 1/\omega = R_6 C_1$. Za merenje temperature ova konstanta ima tipičnu vrednost od 0.1s.

7.5.3. Grejač

Kako je u uvodu rečeno, ulazni parametri u grejač na osnovu kojih kolo određuje disipaciju tranzistora su skalirani signal temperature V_M i zadata vrednost temperature V_S . Ova dva naponska signala moraju reprezentovati temperaturu na isti način, tj. zavisnost napona od temperature mora biti ista. Otpornička mreža R_7 , R_8 i R_9 služi da skalira napon V_T pri čemu paralelna veza R_8 i R_9 služi da se uz ograničenje

otpornosti iz reda E12 dobije što je moguće približnija vrednost skaliranja. Paralelna veza R8 i R9 biće u tekstu obeležena sa R89.

Uz uslov

$$R_{11} \gg R_7, R_8, R_9 \quad (7.5.12)$$

signal V_M se dobija preko formule za naponski

$$V_M = V_T \frac{R_{89}}{R_{89} + R_7} \quad (7.5.13)$$

Uslov idealnosti operacionog pojačava znači da je $V = V_S$ pa se struja kroz R11 može odrediti kao

$$i_{11} = \frac{V_M - V_S}{R_{11}} \quad (7.5.14)$$

Kako je operacioni pojačavač idealan, to važi da je struja kroz C2 jednaka i_{11} . Ako na trenutak zanemarimo postojanje diode D1 (kasnije više reći o tome), pad napona na C2, od tačke V- ka tački v_E se može pisati kao

$$i_{11} = C_2 \frac{du_2}{dt} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{C_2} \int i_{11} dt \quad (7.5.15)$$

Sada se napona na emiteru v_E može pisati kao

$$v_E = V_S - u_2 = V_S - \frac{1}{C_2} \int i_{11} dt = V_S + \frac{1}{C_2 R_{11}} \int (V_S - V_M) dt \quad (7.5.16)$$

Struja kroz tranzistor Q1 je određena sa

$$i_E = i_C = \frac{v_E}{R_E} \quad (7.5.17)$$

Pa se disipacija na Q1 uz pomoć (7.5.16) može odrediti kao

$$P = v_{CE} i_C = (V_{CC} - v_E) \frac{v_E}{R_E} \approx V_{CC} \frac{v_E}{R_E} = \frac{V_{CC}}{R_E} \left(V_S + \frac{1}{C_2 R_{11}} \int (V_S - V_M) dt \right) \quad (7.5.18)$$

uz pretpostavku da je napon v_E značajno manji od V_{CC} , što je moguće ispuniti.

Jednačina (7.5.18) govori da disipacija ima dva člana, prvi koji je linearno proporcionalan sa zadatom temperaturom i drugi, koji je proporcionalan integralu signala greške. Dakle, disipacija tranzistora je proporcionalna srednjoj vrednosti razlike stvarne i željene temperature. Vremenska konstanta sa kojom se usrednjava signal greške je proizvod $C_2 R_{11}$ koji takodje treba da ima vrednost u zoni od nekoliko stotina milisekundi. I R11 i C2 se mogu proizvoljno varirati radi dobijanja željene konstante, pri čemu ne treba zaboraviti uslov (7.5.12).

Dioda D1 ima jednostavnu namenu da ograniči pad napona na C2 na vrednost praga provodjenja diode od $V_\gamma = 0.5V$, čime se ograničava ukupna vrednost integrala iz (7.5.16), a time i maksimalna vrednost napona v_E na

$$V_{E \max} = V_{S \max} + V_\gamma \quad (7.5.19)$$

Dioda ne utiče na minimalnu vrednost napona v_E , pošto ne vodi struju u režimu inverzne polarizacije. Na taj način se ograničava i maksimalna disipacija tranzistora Q1, kako usled prevelike razlike između trenutne i zadate temperature integral uzeo velike vrednosti i samim tim se Q1 pregrejavao i pregoreo.

Otpornička mreža R10, R12 i P2 služi kao ulaz od strane korisnika za zadavanje željene temperature.

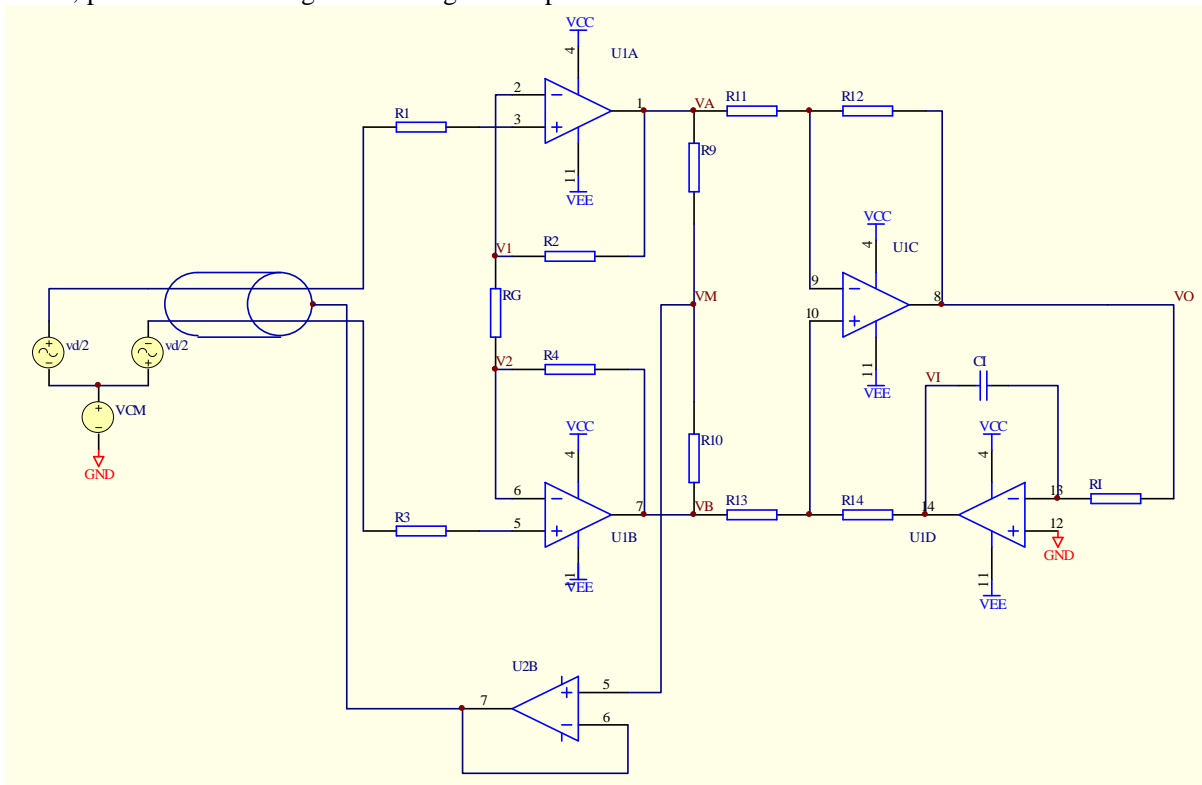
$$V_{CC} \frac{R_{10}}{R_{10} + P_2 + R_{12}} \leq V_S \leq V_{CC} \frac{R_{10} + P_2}{R_{10} + P_2 + R_{12}} \quad (7.5.20)$$

Zadatak 7.6 Instrumentacioni pojačavač

Problem merenja malih naponskih nivoa (diferencijalni signal) koji su posledica dejstva merne veličine, a nalaze se superponirani na jednosmernoj komponenti napona (zajednički signal), jedan je od ključnih problema instrumentacione elektronike. Ovakva situacija tipično nastaje kod merenja sile ili istežanja putem mernih traka, gde se zajednička komponenta izlaznog signala sa mernog mosta nalazi na pola napona napajanja mosta a diferencijalna komponenta uzima za nekoliko redova veličine manje vrednosti. Kako samo diferencijalna komponenta nosi signal od interesa, potrebno je pojačati ovu komponentu do nivoa volti a istovremeno anulirati zajedničku komponentu. Kako je za pojačanje diferencijalne komponente potrebno veliko pojačanje, direktno sprezanje izlaza mernog mosta sa ovakvim pojačanjem dovelo bi do prekoračenja izlaznog naponskog ograničenja usled prisustva pojačanje zajedničke komponente.

Jedno od rešenja ovog problema koje se ustalilo u industriji je takozvani instrumentacioni pojačavač (*instrumentation amplifier-IA*). IA je diferencijalni pojačavač (oduzimač) sa velikim i dobro definisanim pojačanjem diferencijalnog signala, velikim faktorom potiskivanja zajedničkog signala (*common mode rejection ratio.CMRR*) i sposobnošću pomeranja naponskog nivoa nule na izlazu. Rezultat primene IA je dobijanje naponskog signala referenciranog prema masi (ili nekom drugom željenom nivou) koji je pojačana slika ulaznog diferencijalnog signala.

IA se može kupiti kao komercijalna elektronska komponenta sa veoma dobrim specifikacijama, tzv. Integrisani IA. Od interesa je međutim izučiti princip rada IA kako bi se na modelu uočile potencijalne slabosti i razumeti specifikacije koje prate IA kao komercijalnu komponentu. Postoji više rešenja za konstruisanje IA od diferencijalnih pojačavača, a tzv. 3OP rešenje sa tri operaciona pojačavača nudi optimalan kompromis po pitanju svojstava i funkcionalnosti i prikazano je na slici 7.1. Integrisani IA se može konstruisati i na nekom drugom principu od prikazanog, ali značenje ključnih specifikacija celog pojačavača su iste, pa se razradom ovog modela ne gubi na opštosti.



7.1. Instrumentacioni pojačavač sa 3 operaciona pojačavača

7.6.1. Instrumentacioni pojačavač sa 3 operaciona pojačavača

Signal koji je potrebno pojačati sa IA prikazan je kao superpozicija generatora zajedničkog napona VCM i generatora diferencijalne komponente $v_d/2$ koji se putem kabla prenosi sa mernog mesta do pojačavača. Situacija koja zahteva kabl do merne tačke nije tako retka kao što se može na prvi pogled učiniti, pošto se u industriji teži ka centralizaciji merno kontrolnog sistema grupisanjem ključnih mernih uređaja na jedno mesto. Naravno, merenje neke fizičke veličine često zahteva instalaciju senzorskog elementa u lokalu, tako da se električni signal sa tog mesta mora voditi kablom do IA. Kabl nažalost nije idealna komponenta, ispoljava otpornost i kapacitivnost između elektroda, a pošto je ujedno i antena, u njemu se indukuju struje koje su posledica promenljivih elektromagnetskih polja u sredini kroz koju kabl prolazi. Stoga kabl unosi u put signala šum, i menja električne karakteristike mernog senzora gledano sa strane IA.

Osnovu IA sačinjavaju dva operaciona pojačavača U1A i U1B sa otpornicima R1-R4 i otpornikom RG. Konfiguracija je simetrična oko otpornika RG, a ključ njenog razumevanja leži u putanji struje i_G kroz otpornik RG. Pod pretpostavkom idealnosti OP, ulazne struje polarizacije u minus ulaze U1A i U1B su nula, pa se može pisati

$$v_B + i_G R_4 + i_G R_G + i_G R_2 = v_A \Rightarrow v_A - v_B = i_G (R_2 + R_4 + R_G) \quad (7.6.1)$$

Uloga otpornika R1 i R3 je zaštitne prirode, služe da spreče oštećenje Opova i ostalih komponenata ukoliko bi se na ulazu kola pojavio prenapon (visok napon van garantovanih limita rada). Ovo se može desiti iz raznih razloga, ali najčešće usled ljudske greške. Pošto su OP idealni, ulazne struje u minus ulaze U1A i U1B su nula, pa su plus ulazi ovih Opova na sledećim potencijalima

$$v_{+U1A} = V_{CM} + \frac{v_d}{2}, v_{+U1B} = V_{CM} - \frac{v_d}{2} \quad (7.6.2)$$

Pošto su Opovi idealni, važi stanje nulte razlike potencijala između njihovim plus i minus ulaza tako da važi

$$v_1 = V_{CM} + \frac{v_d}{2}, v_2 = V_{CM} - \frac{v_d}{2} \quad (7.6.3)$$

Sada se struja kroz otpornik RG iskazuje sa

$$i_G = \frac{v_1 - v_2}{R_G} = \frac{V_{CM} + \frac{v_d}{2} - \left(V_{CM} - \frac{v_d}{2} \right)}{R_G} = \frac{v_d}{R_G} \quad (7.6.4)$$

Smenom (7.6.4) u (7.6.1) dobija se

$$v_A - v_B = \frac{v_d}{R_G} (R_2 + R_4 + R_G) = v_d \left(1 + \frac{R_2 + R_4}{R_G} \right) \quad (7.6.5)$$

Iz priloženog jasno se vidi da ovakva struktura pojačava diferencijalnu komponentu signala sa pojačanjem

$$a_d = 1 + \frac{R_2 + R_4}{R_G} \quad (7.6.6)$$

Zbog prirodne simetrije kola poželjno je da signali v_A i v_B budu simetričnog nivoa kako bi se maksimalno iskoristio izlazni naponski opseg operacionih U1A i U1B. Stoga se uzima da važi $R_2=R_4=R_F$ odakle se ima

$$a_d = 1 + 2 \frac{R_F}{R_G} \quad (7.6.7)$$

Iz jednačine (7.6.7) računa se odnos RF i RG. Postavljanje pojačanja na željenu vrednost lakše se postiže variranjem RG pošto variranje RF zahteva istovremenu promenu dva otpornika. Odatle i dolaze nazivi za otpornike, RG od *Rgain*, ili otpornik kojim se podešava pojačanje a RF od *Rfeedback*, ili reakcijski otpornik pošto se R2 i R4 nalaze u reakcijskoj petlji operacionih pojačavača.

Naponi v_A i v_B sadrže zajedničku komponentu signala. Naime,

$$v_A = v_1 + i_G R_2 \quad (7.6.8)$$

Smenom (7.6.3) i (7.6.4) u (7.6.8) ima se

$$v_A = V_{CM} + \frac{v_d}{2} + \frac{v_d}{R_G} R_2 = V_{CM} + \frac{v_d}{2} \left(1 + 2 \frac{R_2}{R_G} \right) = V_{CM} + \frac{a_d}{2} v_d \quad (7.6.9)$$

Analogno tome

$$v_B = V_{CM} - \frac{v_d}{2} - \frac{v_d}{R_G} R_4 = V_{CM} - \frac{v_d}{2} \left(1 + 2 \frac{R_4}{R_G} \right) = V_{CM} - \frac{a_d}{2} v_d \quad (7.6.10)$$

Dakle oba napona sadrže zajedničku komponentu signala koja "smeta" pošto je poželjno da izlazni napon IA bude bez zajedničke komponente, referenciran prema nekom naponskom nivou, najčešće masi.

Za eliminaciju zajedničkog signala služi drugi stepen sačinjen od OP U1C i otpornika R11-R14 koji se ponaša kao pojačavač razlike. Za razumevanje rada ovog dela kola može se smatrati da je izlazni napon integratora (U1D) V_I konstantna veličina. Pod pretpostavkom idealnosti operacionog pojačavača otpornici R13 i R14 formiraju razdelnik napona koji određuje napon pozitivnog ulaza U1D.

$$v_{+U1D} = v_B \frac{R_{14}}{R_{13} + R_{14}} + V_I \frac{R_{13}}{R_{13} + R_{14}} \quad (7.6.11)$$

Minus ulaz operacionog pojačavača je na istom potencijalu, a istovremeno je struja polarizacije ovog ulaza jednaka nuli. Stoga se može pisati

$$v_O = v_{+U1D} - \frac{v_A - v_{+U1D}}{R_{11}} R_{12} = v_{+U1D} \left(1 + \frac{R_{12}}{R_{11}} \right) - v_A \frac{R_{12}}{R_{11}} \quad (7.6.12)$$

Smenom (7.6.11) u (7.6.12) ima se

$$v_O = v_B \frac{R_{14}}{R_{13} + R_{14}} \left(1 + \frac{R_{12}}{R_{11}} \right) + V_I \frac{R_{13}}{R_{13} + R_{14}} \left(1 + \frac{R_{12}}{R_{11}} \right) - v_A \frac{R_{12}}{R_{11}} \quad (7.6.13)$$

Zahtev je da izlazni napon pojačavač razlike napona v_A i v_B , što znači da mora važiti

$$\frac{R_{14}}{R_{13} + R_{14}} \left(1 + \frac{R_{12}}{R_{11}} \right) = \frac{R_{12}}{R_{11}} \quad (7.6.14)$$

Analizom članova jednačine (7.6.14) uočava se jedno moguće rešenje, da je

$$1 = \frac{R_{12}}{R_{11}} = 2 \frac{R_{14}}{R_{13} + R_{14}} \quad (7.6.15)$$

što je lako postići ako važi da je

$$R_{11} = R_{12} = R_{13} = R_{14} = R_D \quad (7.6.16)$$

Smenom (7.6.16) u jednačinu (7.6.13) ima se

$$v_O = V_I - (v_A - v_B) \quad (7.6.17)$$

Što znači da se kolo ponaša kao invertujući pojačavač koji generiše napon proporcionalan razlici napona v_A i v_B sa pojačanjem -1 čija se jednosmerna komponenta može podesiti naponom V_I .

Smenom jednačina (7.6.9) i (7.6.10) u jednačinu (7.6.17) dobija se izraz

$$v_O = V_I - a_d v_d \quad (7.6.18)$$

koji potvrđuje primenljivost šeme kao IA.

Naravno, vezivanje tačke V_I na masu umesto na izlaz integratora U1D, lako se postiže referenciranje izlaznog signala prema 0V, čime su ispunjeni uslovi za instrumentacioni pojačavač.

7.6.2. Uticaj tolerancije otpornika

Prvi stepen IA generiše napona prema jednačinama (7.6.9) i (7.6.10) iz kojih se vidi da razlika otpornosti R2 i R4 može proizvesti grešku pojačanja. Efekat se može modelirati uvodjenjem odstupanja otpornika R2 od idealne vrednosti

$$R_4 = R_F, R_2 = R_F + \Delta R_2 \quad (7.6.19)$$

Otpornik RG se često zamenjuje potenciometrom kako bi se precizno podesilo pojačanje, tako da se uticaj njegove tolerancije ne razmatra.

Modifikovani izrazi za napone sada glase

$$v_A = V_{CM} + \frac{v_d}{2} \left(1 + 2 \frac{R_F}{R_G} \left(1 + \frac{\Delta R_2}{R_F} \right) \right) =$$

$$= V_{CM} + \frac{v_d}{2} \left(1 + 2 \frac{R_F}{R_G} (1 + k_2) \right) = V_{CM} + \frac{a_{d2}}{2} v_d \quad (7.6.20)$$

$$v_B = V_{CM} - \frac{v_d}{2} \left(1 + 2 \frac{R_F}{R_G} \right) = V_{CM} - \frac{a_d}{2} v_d \quad (7.6.21)$$

Sa k_2 obeležena je tolerancija otpornika R2.

Prenos signala kroz pojačavač razlike takodje može biti podložan efektima tolerancije otpornika, što se može modelirati tolerancijom otpornika R14. Važi simetrija $R_{11}=R_{12}=R_{13}=R_D$, osim $R_{14}=R_D+\Delta R_{14}$. Smenom uslova u jednačinu (7.6.13) ima se

$$v_O = -v_A + v_B \frac{2(R_D + \Delta R_{14})}{2R_D + \Delta R_{14}} + V_I \frac{2R_D}{2R_D + \Delta R_{14}} =$$

$$= -v_A + v_B \frac{2 \left(1 + \frac{\Delta R_{14}}{R_D} \right)}{2 + \frac{\Delta R_{14}}{R_D}} + V_I \frac{2}{2 + \frac{\Delta R_{14}}{R_D}} =$$

$$= -v_A + v_B \frac{2(1+k_{14})}{2+k_{14}} + V_I \frac{2}{2+k_{14}} \quad (7.6.22)$$

Sa k_{14} obeležena je tolerancija otpornika R14.

Smenom jednačina (7.6.20) i (7.6.21) u jednačinu (7.6.22) dobija se

$$v_O = -V_{CM} - \frac{a_{d2}}{2} v_d + \left(V_{CM} - \frac{a_d}{2} v_d \right) \frac{2(1+k_{14})}{2+k_{14}} + V_I \frac{2}{2+k_{14}} =$$

$$= -\frac{a_{d2}}{2} \left(1 + \frac{2(1+k_{14})}{2+k_{14}} \right) v_d + V_{CM} \left(\frac{2(1+k_{14})}{2+k_{14}} - 1 \right) + V_I \frac{2}{2+k_{14}} \quad (7.6.23)$$

Analizom jednačine uočava se odstupanje pojačanja diferencijalnog signala od projektovane vrednosti iz jednačine (7.6.18)

$$a_d' = - \frac{\left(1 + 2 \frac{R_F}{R_G} (1 + k_2) \right) \left(1 + \frac{2(1+k_{14})}{2+k_{14}} \right)}{2} \quad (7.6.24)$$

Ovo se naravno može kompenzovati podešavanjem vrednosti RG koji se realizuje kao potenciometar. Mnogo je veći problem pojava zajedničkog signala u izlaznom signalu

$$a_{cm} = \left(\frac{2(1+k_{14})}{2+k_{14}} - 1 \right) \quad (7.6.25)$$

IA ispoljava pojačanje zajedničkog signala pa je moguće definisati faktor potiskivanja zajedničkog signala (*common mode rejection ratio* – CMRR)

$$CMRR = \frac{a_d}{a_{cm}} = \frac{a_d}{\left(\frac{2(1+k_{14})}{2+k_{14}} - 1 \right)} \quad (7.6.26)$$

Naravno, za $k_{14}=0$ sledi beskonačno CMRR. Ako se koriste otpornici tolerancije 1%, otpornik R14 može imati otpornost za 1% veću od nominalne. U tom slučaju CMRR je

$$\frac{a_d}{\left(\frac{2(1+0.01)}{2+0.01}-1\right)} = 201 \cdot a_d \quad (7.6.27)$$

Pogodno je što CMRR raste sa diferencijalnim pojačanjem. Ako je na primer $a_d=1000$ dobija se da je $CMRR=200000$. Ukoliko je diferencijalni signal npr. $100\mu V$ a zajednički signal $1V$, dobija se da je komponenta diferencijalnog signala na izlazu IA $100mV$ dok je komponenta zajedničkog signala na izlazu oko $5mV$, što je odstupanje od 5% od vrednosti signala. Ovakva greška može biti značajna. Iz ovog razloga se i R14 obično realizuje kao potenciometar, pri čemu se konstruisano kolo baždari tako da se podešavanjem RG i R14 dobije željeno diferencijalno pojačanje a minimalno pojačanje zajedničkog signala.

7.6.3. Automatska kompenzacija ofseta

Uloga sklopa oko operacionog pojačavača U1D je da prati jednosmernu komponentu napona na izlazu V_O i promenom napona V_I održava tu jednosmernu komponentu na nula volti. Prema jednačini (7.6.17) poništavanje jednosmerne komponente na izlazu znači da napon V_I mora imati suprotan znak od V_O . Takođe, izdvajanje samo jednosmerne komponente iz signala v_o zahteva filtriranje preko filtra niskopropusnika opsega. Pogodno objedinjavanje funkcija invertovanja i filtriranja obavlja integrator, koji se konstruisan oko operacionog pojačavača U1D sa otpornikom RI i kondenzatorom CI.

Pod pretpostavkom idealnog operacionog pojačavača važi jednakost struja kroz kondenzator CI i otpornik RI

$$i_c = \frac{v_o}{R_I} = C_I \frac{du_c}{dt} \quad (7.6.28)$$

Napon v_I sada je određen kao

$$v_I = -u_c = -\frac{1}{R_I C_I} \int v_o(t) dt \quad (7.6.29)$$

Operacija integraljena je prenosna karakteristika filtra niskopropusnika prvog reda sa polom na učestanosti $\omega=1/R_I C_I$. Znak minus ispunjava potrebu invertovanja pa se sada može slobodno pisati

$$V_I = -V_O \quad (7.6.30)$$

Smenom (7.6.30) u jednačinu (7.6.17) ispostavlja se da važi

$$v_o = v_a - v_b \quad (7.6.31)$$

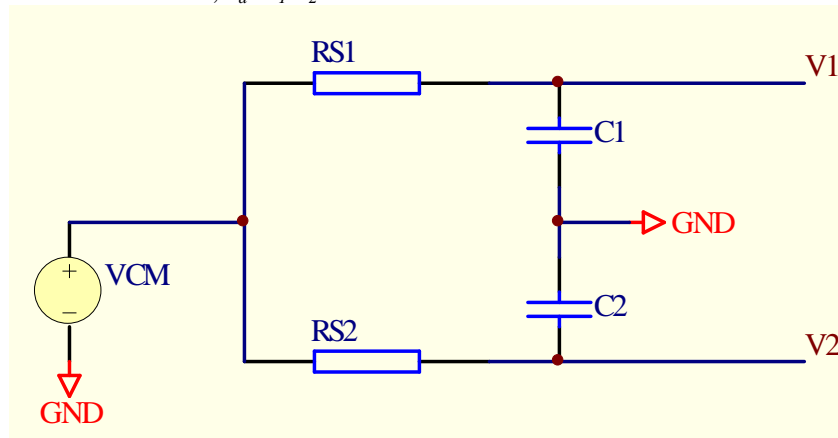
što znači da je jednosmerna komponenta u izlaznom signalu eliminisana.

Treba primetiti da ovakva konstrukcija eliminiše uticaj ofseta operacionih pojačavača pošto su ulazni naponski ofseti jednosmerne komponente po prirodi, i njihov prenos kroz kolo do izlaznog napona takodje proizvodi promenu njegove jednosmerne komponente. Stoga integrator usrednjava i ovu komponentu i omogućava njeno ukljanjanje iz izlaznog signala. Iz ovog razloga kolo ne sadrži komponente za anuliranje ofseta jer se ova operacija vrši automatski. Ofset OP U1D utiče na tačnost postavljanja vrednosti V_b , tako da se zadavanje realizuje potenciometrom, što omogućava kompenzaciju.

7.6.4. Napajanje oklapanja kabla

Kabl koji dovodi signal sa pretvarača do IA se konstruiše tako da poseduje oklapanje (*shielding*), u žargonu struke širm (germanizam). Oklapanje kabla značajno smanjuje efekte elektromagnetske indukcije usled prisustva spoljašnjih EM polja oko kabla pošto se oklop ponaša kao Faradejev kavez. Nažalost, između provodnika signala i oklopa javlja se kapacitet pošto oni sačinjavaju strukturu ekvivalentnu cilindričnom kondenzatoru. Jedna elektroda je žica koja vodi signal a druga elektroda je oklop, između kojih se nalazi izolacioni materijal. Problem nastaje zbog različite kapacitivnosti između svake pojedine žice ka oklopu, koja u sprezi sa izlaznom otpornošću senzora ispoljava dejstvo filtra niskopropusnika opsega. Ako se oklop veže na tačku mase, različite kapacitivnosti u praksi znače da se na ulazima IA pojavljuju različiti signali ako dolazi do varijacije zajedničkog signala u vremenu. Ovi signali su takve prirode da ih IA interpretira kao diferencijalni signal i pojačava generišući tako grešku na izlazu. Ekvivalentni model kabla na kome se vidi dva filtra niskopropusnika, za svaki ulaz u IA po jedan, prikazan je na slici 7.1. Komponente RS1, RS2, C1 i

C2 modeliraju električne osobine kabla, oklop kabla je tačka gde se spajaju kondenzatori i spojen je na masu. Naponi V1 i V2 se vode na ulaz IA, $v_d = v_1 - v_2$.



7.1. Model kabla sa oklapanjem

Jedno od mogućih rešenja je da se oklop umesto na tačku mase veže na potencijal koji je jednak potencijalu zajedničkog signala. U tom slučaju, promena zajedničkog signala na strani senzora ne dovodi do pojave diferencijalnog signala pošto se drugi kraj kondenzatora između žica i oklopa napaja signalom istog nivoa. Ovo znači da se kondenzatori ne pune niti prazne, pa se filtersko svojstvo ne ispoljava.

Izvor signala koji napaja oklop mora imati nisku izlaznu impedansu (naponski izvor) kako bi se struje indukovane usled EM polja odvele u tu tačku i preko nje u masi. Potencijal zajedničkog signala može se lako napraviti ako se primeti da sumiranjem jednačina (7.6.9) i (7.6.10) sledi

$$v_A + v_B = 2V_{CM} \quad (7.6.32)$$

Signal V_{CM} dostupan je dakle preko običnog naponskog razdelnika sa jednakim vrednostima otpornosti, povezanog na potencijale v_A i v_B . Tu funkciju obavljaju otpornici R_9 i R_{10} , koji generišu napon $V_M = V_{CM}$ prema obrascu

$$v_M = \frac{v_A + v_B}{2} = V_{CM} \quad (7.6.33)$$

Operacioni pojačavač koje sledi ovaj napon, U2B, povezan je kao bafer i služi da obezbedi nisku izlaznu impedansu za napajanje oklopa kabla.

Zadatak 7.7 Stabilizator napona

Jedan od ključnih podsklopova, prisutan u svakom elektronskom uređaju, je stabilizator napona čija je uloga da obezbedi kontinuiranu kontrolu napona napajanja i učini ih neosetljivim na promene temperature, potrošnju struje elektronskog uređaja i promene napona kojim se uređaj napaja. Baterijsko napajanje predstavlja izvor električne energije čiji napon postepeno opada kako se prazni baterija. U slučaju napajanja iz električne mreže mogu se javiti varijacije napona mreže koje se kreću i do 10%. Ovakva varijacija napona napajanja elektronskog uređaja je neprihvatljiva pošto remeti projektovanu polarizaciju aktivnih komponentata. Iz ovog razloga se praktično svaki elektronski sklop oprema sa sopstvenim stabilizatorom napajanja.

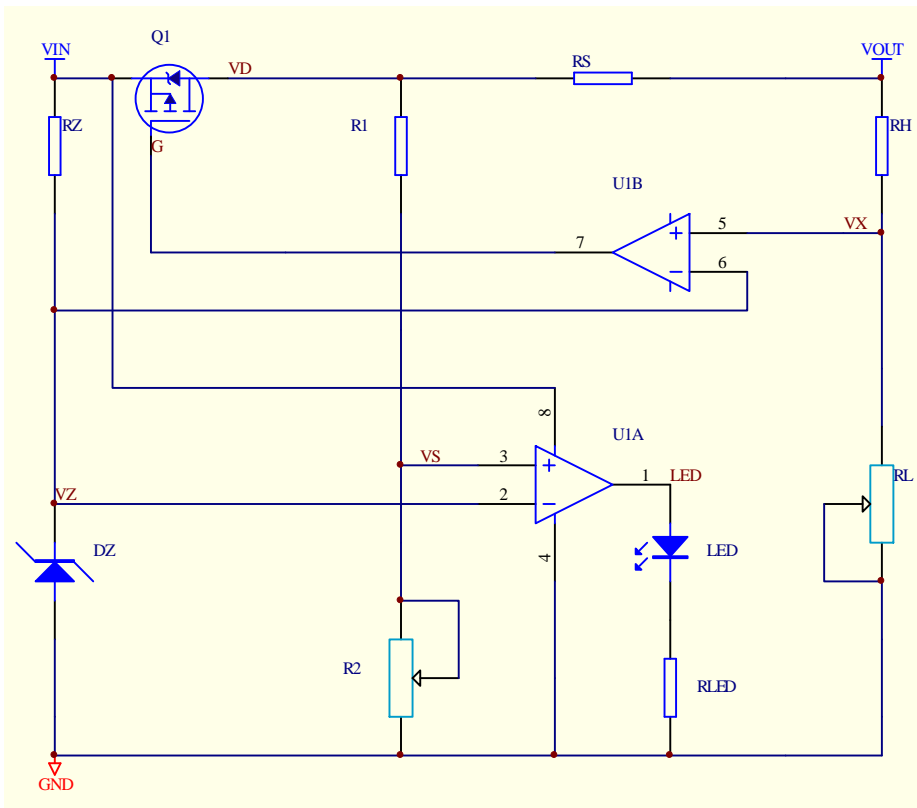
Stabilizatori napajanja su podjednako stari koliko i elektronika, pa se vremenom razvilo mnogo varijanti realizacije koje su optimizovane za određene uslove rada. Naravno, postoje mnogi zajednički elementi za sve realizacije. Pre svega generisanje stabilnog napajanja zahteva postojanje „naponske reference“, elektronskog elementa koji generiše konstantnu vrednost napona, bez obzira na varijacije ulaznog napona. Ovu ulogu uglavnom obavlja zener dioda koja u režimu proboja ispoljava malu varijaciju svog napona sa promenom struje kroz diodu. Ukoliko elektronski sklop koji stabilizator napaja zahteva struju napajanja poredivu sa strujom polarizacije zener diode tada se ne može garantovati dovoljna stabilnost struje polarizacije koju zener dioda zahteva za rad. Stoga se u stabilizator ugrađuje tzv. izlazni tranzistor (*pass transistor*) čija je uloga da napaja sklop strujom tako da se zener dioda nezavisno polariše. Promene izlazne struje koju generiše stabilizator napona bi mogle dovesti do promene izlaznog napona pošto je izlazni tranzistor praktično polarizovan ovom strujom, pa se javlja promena napona na kontrolnoj elektrodi. Dodatno, kako su sve komponente osetljive na temperaturu, neophodna je i petlja automatskog upravljanja čija je uloga da prati (*monitoring*) vrednost izlaznog napajanja i ukoliko ona odstupa od definisane vrednosti koriguje polarizaciju izlaznog tranzistora kako bi obezbedila da se izlazni napon vrati na željenu vrednost. Dakle, svaki stabilizator sadrži tri osnovna radna bloka:

1. Naponsku referencu
2. Izlazni tranzistor (ili stepen ako ih je više)
3. Petlju za regulaciju izlaznog napona

Jedna od mogućih realizacija stabilizatora prikazana je na slici 7.1 i uključuje zener diodu DZ kao naponsku referencu, PMOS tranzistor Q1 kao izlazni tranzistor, OP U1B kao osnovu regulacijske petlje i OP U1A kao element za detekciju strujnog prekoračenja (*current overload*). Napon VIN je ulazni napon koji nije stabilisan, a napon VOUT je izlazni stabilisani napon za napajanje drugih uređaja. Ova konkretna realizacija spada u klasu stabilizatora sa malim padom napona (*low dropout regulator*) što znači da pad napona duž izlaznog tranzistora može biti veoma mali, reda stotinjak mV, a da stabilizator i dalje ispravno radi. Šema takodje uključuje i potencijometar RL za podešavanje vrednosti izlaznog napona i potencijometar R2 za podešavanje indikacije strujnog prekoračenja. Ovakva realizacija se zove podesivi stabilizator napona (*adjustable voltage regulator*) i korisna je alatka za rad u laboratoriji.

Stabilizatori napona se mogu kupiti kao integrisana kola koja sadrže sve pomenute komponente i unapred su im fiksirane vrednosti izlaznog napona ili su podesive. Tipičan primer je 78(S,M,L)XX serija pozitivnih naponskih regulatora, ili 79(S,M,L)XX serija za negativne napona. Osnovna podela ovih kola je po vrednosti izlaznog napona i maksimalnoj izlaznoj struji.

Neke realizacije integrisanih stabilizatora napona ne sadrže izlazni tranzistor, već korisnik sam projektuje ovaj element prema svojim potrebama.



7.1. Stabilizator napona

7.7.1. Naponska referenca

Zener dioda DZ obavlja ulogu naponske reference i polarizovana je direktno sa ulaznog nestabiliziranog napona V_{IN} preko otpornika RZ. Struja kroz zener diodu određena je relacijom

$$I_Z = \frac{V_{IN} - V_Z}{R_Z} \quad (7.7.1)$$

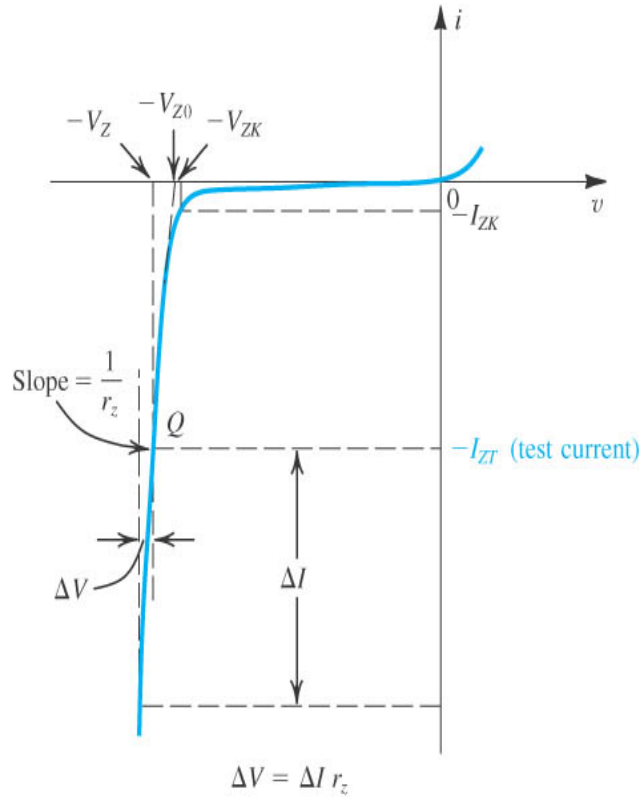
Proračun vrednosti otpornika RZ za definisanu radnu račku zener diode je jednostavno

$$R_Z = \frac{V_{IN} - V_Z}{I_Z} \quad (7.7.2)$$

Iz relacije (7.7.1) se vidi da promena ulaznog napona V_{IN} izaziva promenu struje kroz zener diodu što dovodi do malih promena napona V_Z . Promena ovog napona mora biti što je moguće manja kako bi izlazni napon bio što stabilniji. Promena napona V_Z definisana je preko inkrementalne ili dinamičke otpornosti zener diode r_Z

$$r_Z = \frac{\Delta V_Z}{\Delta I_Z} \quad (7.7.3)$$

Ova otpornost definisana je u proizvođačkoj dokumentaciji, opada sa strujom kroz diodu, a grafički je definisana na slici 7.1.



7.1. Strujno naponska karakteristika zener diode

Najniža vrednost ove otpornosti praktično je određena maksimalnom strujom kroz zener diodu ili maksimalnom disipacijom zener diode

$$P_{Z\max} \approx I_Z V_Z \quad (7.7.4)$$

koji god da je kritičniji od ova dva parametra. Naravno, promene napona na zener diodi i struje kroz nju su male pa se ne uzimaju u račun za disipaciju. Najveća vrednost je na kolenu u tački (V_{ZK}, I_{ZK}) koja se naravno izbegava za rad, a praktične radne vrednosti su reda desetak oma.

Promena struje kroz zener diodu ΔI_Z posledica je promene ulaznog napona V_{IN}

$$\begin{aligned} V_{IN} + \Delta V_{IN} &= V_Z + \Delta I_Z r_z + (I_Z + \Delta I_Z) R_Z = V_Z + I_Z R_Z + \Delta I_Z (R_Z + r_z) \\ \Rightarrow \Delta I_Z &= \frac{V_{IN} - I_Z R_Z + \Delta V_{IN} - V_Z}{R_Z + r_z} = \frac{V_Z + \Delta V_{IN} - V_Z}{R_Z + r_z} = \frac{\Delta V_{IN}}{R_Z + r_z} \end{aligned} \quad (7.7.5)$$

Smenom (7.7.5) u (7.7.3) sledi

$$\Delta V_Z = r_z \Delta I_Z = \frac{r_z}{R_Z + r_z} \Delta V_{IN} \quad (7.7.6)$$

Sada postaje jasan uticaj parametra r_z na rad stabilizatora i stav da je mala vrednost r_z poželjna za rad stabilizatora.

7.7.2. Izlazni tranzistor

PMOSFET Q1 (p kanalni tranzistor sa efektom polja sa metal oksidnim gejtom) je izlazni tranzistor koji svojom strujom drejna napaja potrošač vezan na V_{OUT} . MOS tranzistori se ponašaju kao naponski kontrolisani strujni izvori u režimu saturacije što upravo odgovara potrebama za realizaciju stabilizatora napona. U konkretnom slučaju MOS radi u šemi za zajedničkim sorsom pošto je u režimu za mali signal ulazni napon praktično na masi. U ovom režimu važi

$$i_D = k (v_{GS} - V_T)^2 \quad (7.7.7)$$

gde je v_{GS} napon između gejta i sorsa ($v_S = V_{IN}$), V_T je napon praga MOSFET-a a k je transkonduktanski parametar. U praksi su češće dostupni MOSFET tranzistori sa indukovanim kanalom (*enhancement mode*) pa je napon praga $V_T < 0V$. Dakle, napon gejta v_G mora biti ispod napona sorsa V_{IN} , tj. $v_{GS} < 0V$ kako bi MOSFET vodio struju i napajao potrošač.

O uticaju jednačine (7.7.7) na rad stabilizatora ne treba puno brinuti pošto će regulatorna petlja sama podesiti v_{GS} tako da se dobije odgovarajuća struja i_D za potrošač. Mnogo je važnije ograničenje maksimalne disipacije (naravno podrazumeva se da su ispoštovane vrednosti maksimalne struje drejna i maksimalne vrednosti probojnih napona na MOSFET-u).

$$P_{\max} = V_{DS} I_D \approx (V_{IN} - V_{OUT}) I_{OUT} \quad (7.7.8)$$

Implicitno se podrazumeva da je pad napona na otporniku R_S mali (o tome više reči kasnije) kao i da je struja kroz otpornike R_1 , R_2 , R_H i R_L zanemarljiva u odnosu na struju potrošača, što nije teško omogućiti.

7.7.3. Regulatorna petlja

Operacioni pojačavač U1B podešava napon gejta prema naponu sorsa Q1 v_{GS} tako da se na izlazu napon V_{OUT} održava na zadatoj vrednosti. Ovakva funkcionalnost postiže se poredjenjem napona V_X i napona zener diode V_Z preko U1B. Pojačana razlika ovih napona (signal greške) dovodi se na gejt tako da se ova razlika smanju na minimalnu moguću (ofset operacionog pojačavača). Uzimajući u obzir idealnost operacionog pojačavača koji ima konačno pojačanje A_0 može se pisati

$$v_X = V_{OUT} \frac{R_L}{R_L + R_H}, v_G = A_0 (V_X - V_Z) = A_0 \left(V_{OUT} \frac{R_L}{R_L + R_H} - V_Z \right) \quad (7.7.9)$$

Idealan operacioni pojačavač ispoljava beskonačno pojačanje pa se za sve konačne vrednosti napona v_G (naravno to je uslov ispravnog rada stabilizatora) može pisati

$$\left(V_{OUT} \frac{R_L}{R_L + R_H} - V_Z \right) = \frac{v_G}{A_0} \underset{A_0 \rightarrow \infty}{\approx} 0 \Rightarrow V_{OUT} = V_Z \frac{R_L + R_H}{R_L} \quad (7.7.10)$$

Jednačina (7.7.10) predstavlja osnovni obrazac za proračun vrednosti otpornika R_L i R_H prema raspoloživi vrednostima napona zener diode. U praksi moguće je više kombinacija napona zener diode i otpornika R_L i R_H . Šema na slici sadrži potencijometar na poziciji R_L kako bi se mogao podesiti izlazni napon na željenu vrednost. Dodatni motiv za primenu potencijometra je i naponski ofset operacionog pojačavača V_{OFF} koji se može uključiti u (7.7.10)

$$\left(V_{OUT} \frac{R_L}{R_L + R_H} - V_Z \pm V_{OFF} \right) = \frac{v_G}{A_0} \underset{A_0 \rightarrow \infty}{\approx} 0 \Rightarrow V_{OUT} = (V_Z \pm V_{OFF}) \frac{R_L + R_H}{R_L} \quad (7.7.11)$$

Primititi da se ofset pojavljuje na izlazu pojačan odnosom otpornika, što znači da je bolje da odnos R_H/R_L bude mali.

Zanimljivo je analizirati uticaj ostalih parametara neidealnog pojačavača na rad kola. Ulazna struja polarizacije + ulaza teče kroz R_L i R_H i mogu proizvoditi pad napona koji može uzročiti odstupanje V_{OUT} od projektovane vrednosti, ali se to opet može kompenzovati potencijometrom. Ulazna struja polarizacije – ulaza teče u zener diodu ili smanjuje njenu struju, ali je njen uticaj zanemarljiv zbog male dinamičke otpornosti zener diode. Konačno naponsko pojačanje takodje malo utiče na rad kola pošto je količnik v_G/A_0 veoma mali za sve praktične vrednosti A_0 . Ograničenje izlazne struje operacionog pojačavača takodje nije bitno pošto gejt zahteva zanemarljivu struju polarizacije. Problem može nastati kod naponskih ograničenja ulaznog zajedničkog napona koji ograničava minimalnu i maksimalnu vrednost napona v_X . Takodje izlazno naponsko ograničenje može praviti problem kada je potrebno da napon gejta bude što je moguće niže ako se traži velika izlazna struja. Stoga je pametan izvor odabrati operacioni pojačavač sa jednostrukim napajanjem (*single supply OP*) kako bi ovo bilo moguće i kako bi se omogućilo da v_X može pasti do 0V a da OP radi ispravno.

Razmatranje ograničenja realnog operacionog pojačava po pitanju frekvencijskog opsega i jedinične frekvencije nije suštinski bitno pošto regulatorna petlja stabilizuje signale niskog frekvencijskog opsega. Takodje, faktor potiskivanja napona napajanja (*PSRR*) nema suštinski značaj.

Od interesa je još izračunati promenu vrednosti izlaznog napona kao posledicu promene ulaznog napona sa V_{IN} na $V_{IN} + \Delta V_{IN}$. Smenom (7.7.6) u (7.7.10) dobija se

$$V_{OUT} + \Delta V_{OUT} = (V_Z + \Delta V_Z) \frac{R_L + R_H}{R_L} = \left(V_Z + \frac{r_z}{R_Z + r_z} \Delta V_{IN} \right) \frac{R_L + R_H}{R_L} \quad (7.7.12)$$

$$\Rightarrow \Delta V_{OUT} = \frac{r_z}{R_Z + r_z} \frac{R_L + R_H}{R_L} \Delta V_{IN} \Rightarrow \frac{\Delta V_{OUT}}{\Delta V_{IN}} = \frac{r_z}{R_Z + r_z} \frac{R_L + R_H}{R_L} = A_v$$

Od interesa je da A_v bude što je moguće manje kako bi stabilizator radio kao pojačavač sa pojačanjem < 1 , i slabio promenu ulaznog signala (ulazni napon). Pogodno je da R_L bude mnogo veće od R_H što u praksi znači da napon zener diode bude što je moguće veći, bliži naponu V_{OUT} . Sa druge strane povećavanje napona V_Z povlači smanjenje otpornika R_Z radi održanja iste struje kroz zener diodu, prema jednačini (7.7.1).

Ovo ima negativan uticaj pošto povećava A_v . Smenom izraza (7.7.2) i (7.7.10) u (7.7.12) sledi

$$A_v = \frac{r_z}{\frac{V_{IN} - V_Z}{I_Z} + r_z} \frac{R_L + R_H}{R_L} = \frac{V_{OUT} r_z I_Z}{V_Z (V_{IN} - V_Z + I_Z r_z)} \quad (7.7.13)$$

Iz jednačine (7.7.13) vidi se da A_v ispoljava minimum pri maksimalnoj vrednosti imenioca. Analiza kvadratne jednačine

$$A_v = \frac{r_z}{\frac{V_{IN} - V_Z}{I_Z} + r_z} \frac{R_L + R_H}{R_L} = \frac{V_{OUT} r_z I_Z}{V_Z (V_{IN} - V_Z + I_Z r_z)} \quad (7.7.14)$$

Pokazuje postojanje ekstrema u tački

$$V_Z = \frac{V_{IN} + I_Z r_z}{2} \quad (7.7.15)$$

u kojoj pojačanje ima vrednost

$$A_{v\min} = \frac{V_{OUT} r_z I_Z}{\left(\frac{V_{IN} + I_Z r_z}{2} \right)^2} \underset{r_z I_Z \ll V_{IN}}{\approx} \frac{4 V_{OUT} r_z I_Z}{V_{IN}^2} \quad (7.7.16)$$

Dakle, poželjno je veliko I_Z koje i smanjuje r_z , ograničenje je naravno disipacija zener diode. Povećanje V_{IN} je takođe blagotvorno ali povećava i disipaciju na izlaznom tranzistoru, pa i tu postoji gornje ograničenje.

7.7.4. Detektor strujnog prekoračenja

OP U1A prati pad napona na otporniku R_S koji služi kao strujni šant. Otpornici R_1 i R_2 dele napon drejna

$$V_S = V_D \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (7.7.17)$$

Napon drejna je

$$V_D \approx V_{OUT} + I_D R_S \quad (7.7.18)$$

Smenom (7.7.18) u (7.7.17) ima se

$$V_S = (V_{OUT} + I_D R_S) \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (7.7.19)$$

Opet se smatra da su struje kroz otpornike R_1 , R_2 i R_L i R_H male. Pod istim uslovima idealnosti operacionog pojačavača važi

$$V_{LED} = A_0 (V_S - V_Z) = A_0 \left((V_{OUT} + I_D R_S) \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_Z \right) \quad (7.7.20)$$

Smenom (7.7.10) u (7.7.20)

$$V_{LED} = A_0 \left(V_{OUT} \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_L}{R_L + R_H} \right) + I_D R_S \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \quad (7.7.21)$$

Pogodnim izborom

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_L}{R_L + R_H} \quad (7.7.22)$$

dobija se

$$V_{LED} = A_0 R_S \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_D \quad (7.7.23)$$

Malim promenama R_2 može se postići da se LED upali pri određenoj vrednosti struje drejna. Ova vrednost se naravno mora eksperimentalno podesiti pošto A_0 ima veliku proizvodjačku toleranciju.

7.7.5. Proračun minimalnog pada napona ulaz-izlaz

Izlazna struja stabilizatora napona (I_D) teče kroz izlazne elektrode tranzistora Q1 i kroz šant otpornik RS i formira pad napona (*dropout voltage*)

$$V_{IN} - V_{OUT} = V_{DO} \quad (7.7.24)$$

Od interesa je da ovaj napon bude što je moguće manji, kako bi se na primer u potpunosti iskoristio kapacitet baterije čiji se napon stabilizuje. Po pitanju pada napona duž šant otpornika situacija je jednostavna

$$v_{RS\max} = R_S i_{D\max} \quad (7.7.25)$$

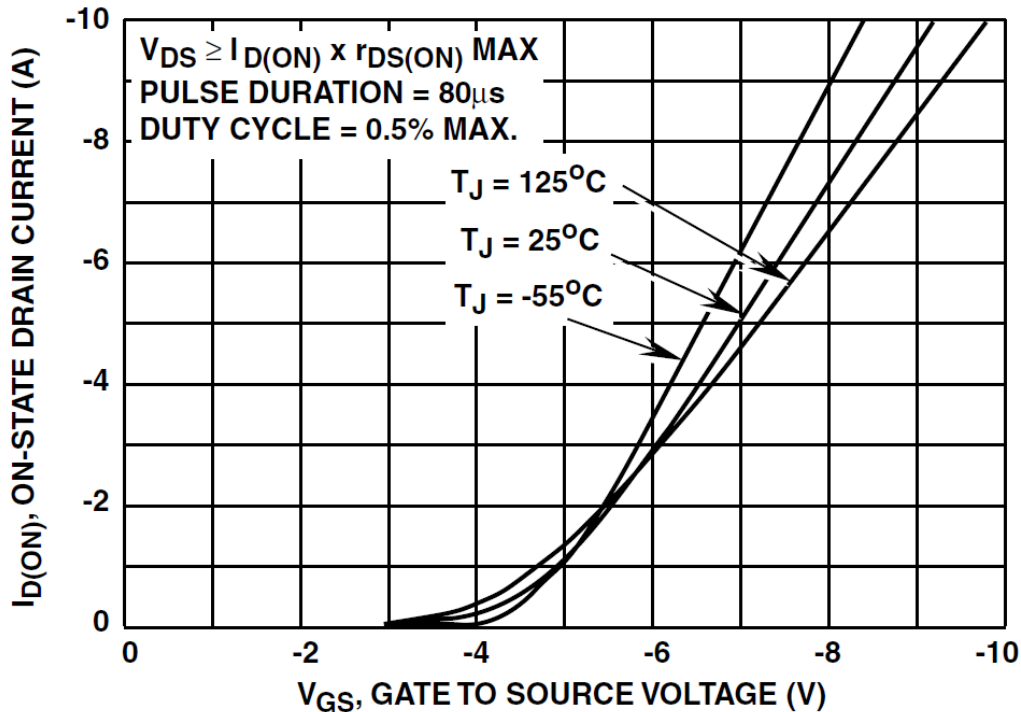
Što se tiče tranzistora Q1, on mora raditi u režimu saturacije. Eventualni prelazak tranzistora u omski režim štetan je po ispravan rad stabilizatora pošto bi izlazni napon praktično bio određen razdelnikom napona koji bi tada formirali otpornost kanala Q1 i otpornost potrošača na izlazu stabilizatora. Stoga bi izlazni napon zavisio u nedozvoljeno velikoj meri od ulaznog napona. Prvi uslova za rad u režimu saturacije je da polarizacija gejt-sors formira kanal. Dakle

$$v_{GS} < -|V_T| \Rightarrow v_{SG} > |V_T| \quad (7.7.26)$$

Drugi uslov za rad u režimu saturacije je da napon između drejna i gejta ne sme biti takav da MOSFET udje u triodni ili omski režim. Uslov je

$$v_{DG} \leq |V_T| \Rightarrow v_D \leq v_G + |V_T| \Rightarrow v_{DS} \leq v_{GS} + |V_T| \Rightarrow v_{SD} \geq v_{SG} - |V_T| \quad (7.7.27)$$

Dakle pad napona duž izlaznih elektroda MOSFETA mora biti veći od razlike trenutne vrednosti napona između sorsa i gejta i apsolutne vrednosti napona praga. Uvidom u (7.7.26) konstatuje se da je ova razlika pozitivna. Za izračunavanje ove vrednosti nedostaje napon sors-gejt. Maksimalna vrednost napona sors-gejt dostiže se u kritičnom slučaju kada je $i_D = i_{D\max}$, vrednost koja se može pročitati sa grafika iz proizvodjačke dokumentacije, slika 7.1.

7.1. $i_D(v_{GS})$ za tranzistor IRF9520

Sa grafika se pročita vrednost v_{GS} koja je kritična i uključi u račun u jednačinu (7.7.27)

$$v_{SD\min} = |v_{GS}(i_{D\max})| - |V_T| \quad (7.7.28)$$

Na primer, ako je maksimalna struja 1A, a napon praga 4V, dobija se da je minimalan pad napona sors-drejn 1V.

Sada se kombinovanje (7.7.28) i (7.7.25) dobija vrednost za minimalan pad napona duž stabilizatora

$$V_{DO} = |v_{GS}(i_{D\max})| - |V_T| + i_{D\max} R_S \quad (7.7.29)$$

Pad napona duž otpornika R_S može se dizajnirati da bude jako mali, reda desetak milivolti, pošto se on može pojačati i kasnije porediti sa zadatom vrednosti za graničnu struju. Pad napona duž Q1 je kritičniji problem pošto zavisi od tipa tranzistora, pa je od interesa da se izabere tranzistor sa velikim nagibom prenosne karakteristike.

8 Pouzdanost

Korisnici elektronskih uređaja, kao i projektanti i trgovci žele da znaju koliko dugo će neki uređaj ispravno raditi. Iako je odgovor u pojedinačnom slučaju nemoguće dati, moguće je statistički tretirati seriju uređaja ili komponenti i odrediti, na primer, srednje vreme bezotkaznog rada ili pouzdanost uređaja.

Pouzdanost je verovatnoća, na određenom nivou poverenja, da će sistem uspešno, bez otkaza, obaviti funkciju za koju je namenjen, unutar specificiranih granica performansi, u toku specificiranog vremena trajanja zadatka, kada se koristi na propisani način i u svrhu za koju je namenjen, pod specificiranim nivoima opterećenja, uzimajući u obzir i prethodno vreme korišćenja sistema.

Još neki pokazatelji pouzdanosti su: funkcija gustine raspodele otkaza sistema i intenzitet otkaza. Do kvantitativnih podataka o pouzdanosti može se doći na tri načina: proračunom, eksperimentalno i u toku eksploatacije.

Funkcija pouzdanosti $R(t)$ se definiše kao verovatnoća da će slučajno vreme rada T sistema (elementa, u datim uslovima) bez otkaza, odnosno do otkaza, biti veće od posmatranog vremena t , odnosno da se u toku vremena T neće pojaviti otkaz:

$$R(t) = P\{T > t\}; t > 0 \quad (8.0.1)$$

Funkcija nepouzdanosti sistema (elementa), $F(t)$ je verovatnoća da će sistem (element) otkazati za vreme t :

$$F(t) = P\{T \leq t\}; t > 0 \Rightarrow R(t) + F(t) = 1 \quad (8.0.2)$$

Funkcija gustine raspodele otkaza $f(t)$ je relativna učestanost broja otkaza u nekom vremenskom intervalu:

$$f(t) = dF(t)/dt = -dR(t)/dt \quad (8.0.3)$$

Ako u nekom trenutku t od ukupnog broja sistema N postoji $n_1(t)$ ispravnih i $n_2(t)$ neispravnih onda važi:

$$R(t) = n_1(t)/N \quad F(t) = n_2(t)/N; \quad n_1(t) + n_2(t) = N \quad (8.0.4)$$

$$F(t) = 1 - n_1(t)/N = 1 - R(t) \Rightarrow R(t) + F(t) = 1 \quad (8.0.5)$$

Intenzitet (pojavljivanja) otkaza $\lambda(t)$ je relativna promena pouzdanosti odnosno uslovna gustina verovatnoće otkaza u intervalu $(t, t+dt)$ pod uslovom da sistem (element) nije otkazao do momenta t .

$$\lambda(t) = \left| \frac{dR(t)}{dt} \right| \frac{1}{R(t)} = -\frac{dR(t)}{dt} \frac{1}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}; \quad \lambda(t) > 0 \quad (8.0.6)$$

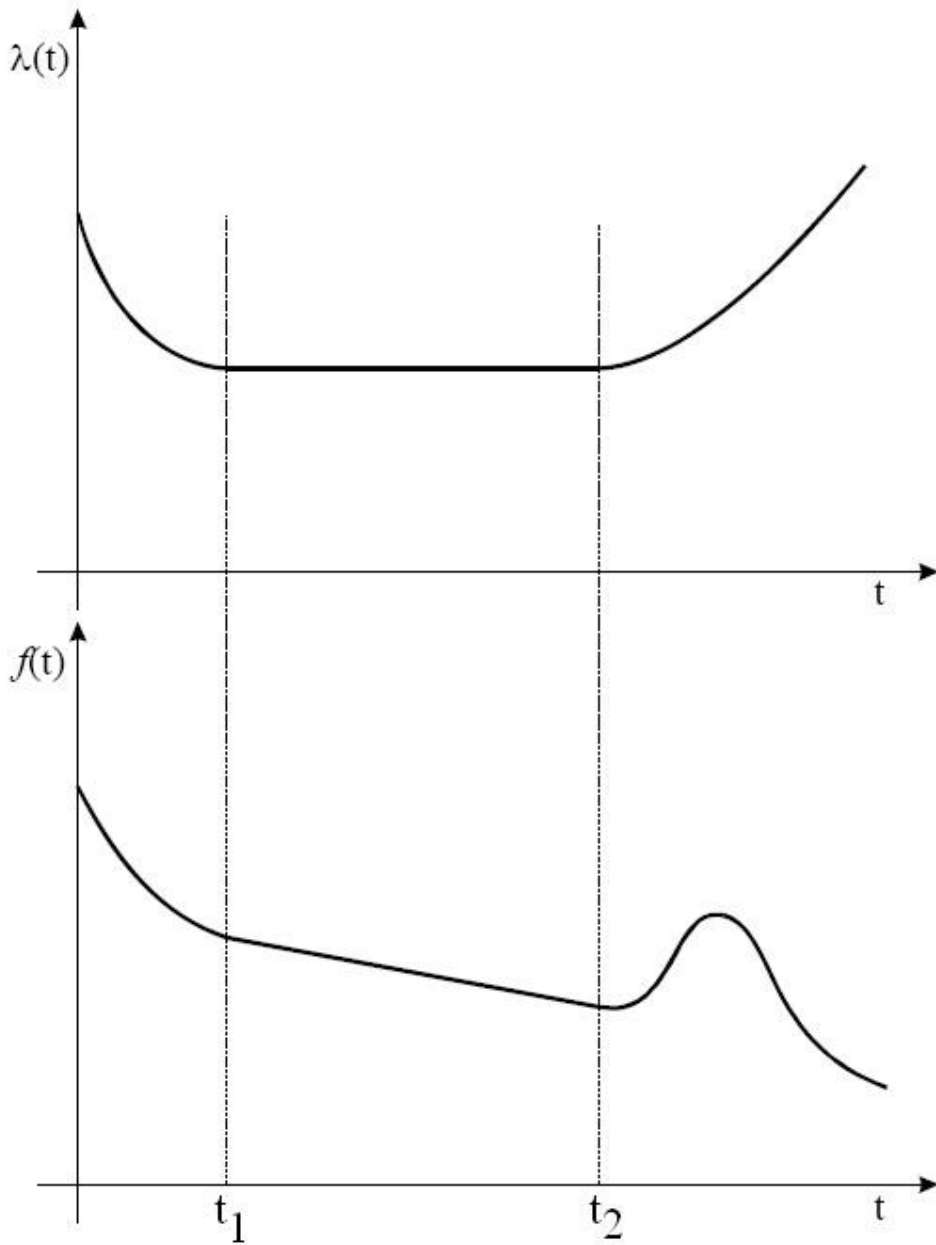
Srednje vreme rada do otkaza (MTTF-Mean Time To Failure) T_{SR} se definiše kao matematičko očekivanje slučajnog vremena rada do prvog otkaza:

$$T_{SR} = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \left(-\frac{dR(t)}{dt} \right) dt = -\int_0^{\infty} t dR(t) = -tR(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (8.0.7)$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow R(t) \rightarrow 0 \Rightarrow T_{SR} = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (8.0.8)$$

Tipični oblici funkcija $\lambda(t)$ i $f(t)$ za elektronske komponente prikazani su na slici 8.1.

U početku korišćenja nekog sistema obično se javlja veći broj otkaza koji se mogu pripisati početnim slabostima ili propuštenim defektima u toku proizvodnje. Kasnije, kada loše izrađene komponente otkazu, ovi takozvani rani otkazi ustupaju mesto otkazima za koje je teško utvrditi uzrok nastajanja. To su takozvani slučajni otkazi čije se vreme pojavljivanja ne može predvideti ali je intenzitet otkaza približno konstantan. Starenjem sistema počinju da se javljaju otkazi usled istrošenosti i tada intenzitet otkaza raste.

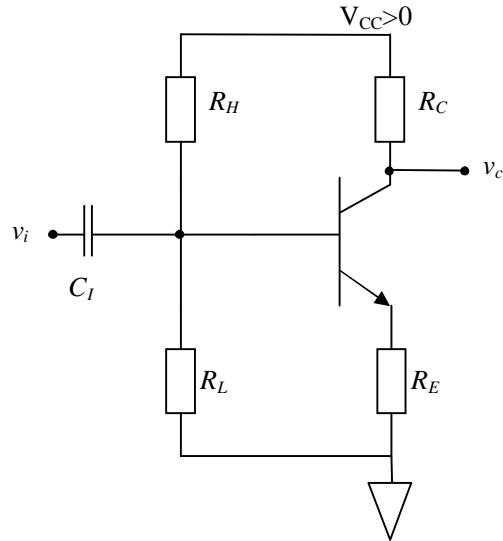


8.1. Tipični oblici funkcije intenziteta otkaza i funkcije gustine raspodele otkaza komponenti

Mnogi proizvođači opreme visoke pouzdanosti puštaju opremu da radi kako bi je doveli na početak intervala konstantnih otkaza. Tek onda je ugrađuju u neki sistem. Na žalost, mnogi sistemi imaju kontinualno opadajuću i kontinualno rastuću funkciju intenziteta otkaza. Mi ćemo se baviti tipičnim slučajem i periodom vremena kada je funkcije intenziteta otkaza za elektronske komponente konstantna u vremenu.

Zadatak 8.1

Odrediti srednje vreme rada do otkaza i pouzdanost pojačavača sa slike, za 30 godina rada. Poznati su intenziteti otkaza pojedinih komponenata: tranzistora, $\lambda_T = 10^{-6}$ 1/h, otpornika $\lambda_R = 5 \cdot 10^{-7}$ 1/h i kondenzatora $\lambda_C = 2 \cdot 10^{-6}$ 1/h. Smatrati da su kontakti, veze i izvor napajanja potpuno pouzdani. Da bi pojačavač sa slike ispravno radio potrebno je da ispravno rade sve elektronske komponente u kolu. Ovakvu



situaciju predstavljamo pomoću blok šeme pouzdanosti, koja je u ovom slučaju redna konfiguracija.



Pod pretpostavkom nezavisnosti otkaza između elemenata, verovatnoća da pojačavač ispravno radi je jednaka proizvodu verovatnoća ispravnog rada pojedinih komponenata.

$$R(t) = R_{CI} R_{RH} R_{RL} R_{RC} R_{RE} R_T \quad (8.1.1)$$

Iz (8.0.6) sledi

$$\lambda(t) = -\frac{dR(t)}{dt} \frac{1}{R(t)} ; \lambda(t) > 0 \quad (8.1.2)$$

$$\frac{dR}{R} = -\lambda(t) dt \Rightarrow \int_1^R \frac{dR}{R} = -\int_0^t \lambda(t) dt \Rightarrow R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} \quad (8.1.3)$$

$$\lambda(t) = const \Rightarrow R(t) = e^{-\lambda t} \quad (8.1.4)$$

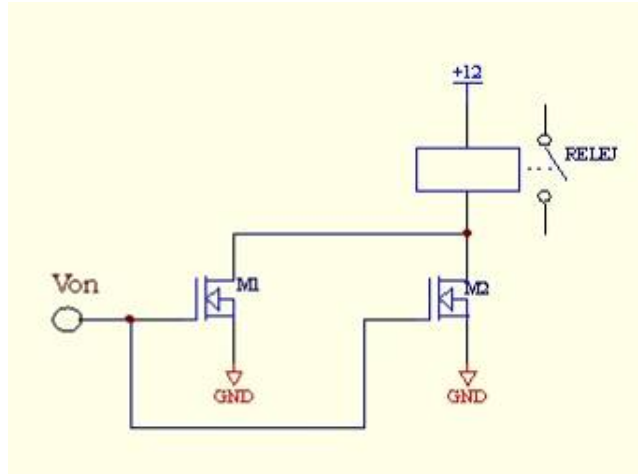
$$R(t) = e^{-\lambda_{CI} t} e^{-\lambda_{RH} t} e^{-\lambda_{RL} t} e^{-\lambda_{RC} t} e^{-\lambda_{RE} t} e^{-\lambda_T t} = e^{-\lambda_C t} e^{-\lambda_R t} e^{-\lambda_R t} e^{-\lambda_R t} e^{-\lambda_R t} e^{-\lambda_T t} = e^{-(\lambda_C + 4\lambda_R + \lambda_T)t} = e^{-\lambda_S t} \quad (8.1.5)$$

$$\lambda_S = \lambda_C + 4\lambda_R + \lambda_T = 5 \cdot 10^{-6} h \quad (8.1.6)$$

$$T_{SR} = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda_S t} dt = \frac{1}{\lambda_S} = 200000h \approx 22,8 \text{ godina} \quad (8.1.7)$$

Zadatak 8.2

Odrediti pouzdanost, srednje vreme rada do otkaza, funkciju gustine raspodele otkaza i intenzitet otkaza kola sa slika 8.1 i 8.2. Poznati su intenziteti otkaza komponenata i to, svih tranzistora, $\lambda_T = 10^{-6}$ 1/h; relea, $\lambda_{REL} = 5 \cdot 10^{-6}$ 1/h; svih otpornika λ_R i svih Zener dioda; λ_D . Smatrati da su kontakti, veze i izvor napajanja potpuno pouzdani. Koja je verovatnoća da će kolo sa slike y ispravno raditi nakon 5 godina?



8.1. Drajver za relej

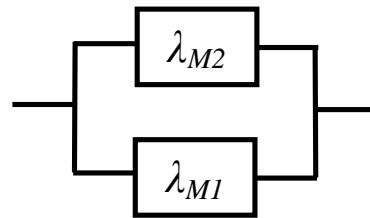
Pretpostavimo da je relej uvek ispravan. Pod pretpostavkom otkaza koji se može modelovati otvorenom vezom, kolo sa slike Z će ispravno raditi ako ispravno radi bar jedan od tranzistora M1 i M2. Odgovarajuća blok šema pouzdanosti je u ovom slučaju paralelna konfiguracija.

Verovatnoća da otkáže tranzistor M1 je: $1 - R_{M1}$

Verovatnoća da otkáže tranzistor M2 je: $1 - R_{M2}$

Verovatnoća da su oba tranzistora otkazala je: $(1 - R_{M1})(1 - R_{M2})$

Verovatnoća da bar jedan tranzistor radi je:



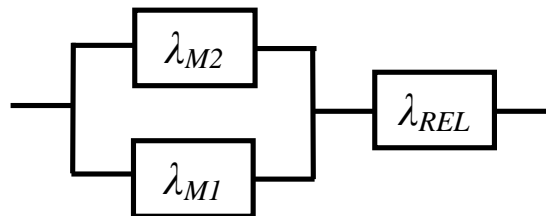
$$1 - (1 - R_{M1})(1 - R_{M2}) = 1 - (1 - e^{-\lambda_T t})^2 = 2e^{-\lambda_T t} - e^{-2\lambda_T t} = e^{-\lambda_T t} (2 - e^{-\lambda_T t}) \quad (8.2.1)$$

$$R(t) = 2e^{-\lambda_T t} - e^{-2\lambda_T t} \quad (8.2.2)$$

$$f(t) = -dR(t)/dt = 2\lambda_T e^{-\lambda_T t} - (-2\lambda_T) e^{-2\lambda_T t} = 2\lambda_T e^{-\lambda_T t} (1 - e^{-\lambda_T t}) \quad (8.2.3)$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{(2 - e^{-\lambda_T t})}{2(1 - e^{-\lambda_T t})} \quad (8.2.4)$$

Ako i relej može da otkáže onda je mora raditi relej i bar jedan od tranzistora, čemu odgovara blok šema pouzdanosti:



Sada je pouzdanost kola R_K :

$$R_K(t) = (2e^{-\lambda_T t} - e^{-2\lambda_T t}) R_{REL} = (2e^{-\lambda_T t} - e^{-2\lambda_T t}) e^{-\lambda_{REL} t} = (2 - e^{-\lambda_T t}) e^{-(\lambda_{REL} + \lambda_T) t}$$

$$f(t) = -dR(t) / dt = 2(\lambda_T + \lambda_{REL}) e^{-(\lambda_T + \lambda_{REL}) t} + (2\lambda_T + \lambda_{REL}) e^{-(2\lambda_T + \lambda_{REL}) t}$$

$$f(t) = [2(\lambda_T + \lambda_{REL}) + (2\lambda_T + \lambda_{REL}) e^{-\lambda_T t}] e^{-(\lambda_T + \lambda_{REL}) t}$$

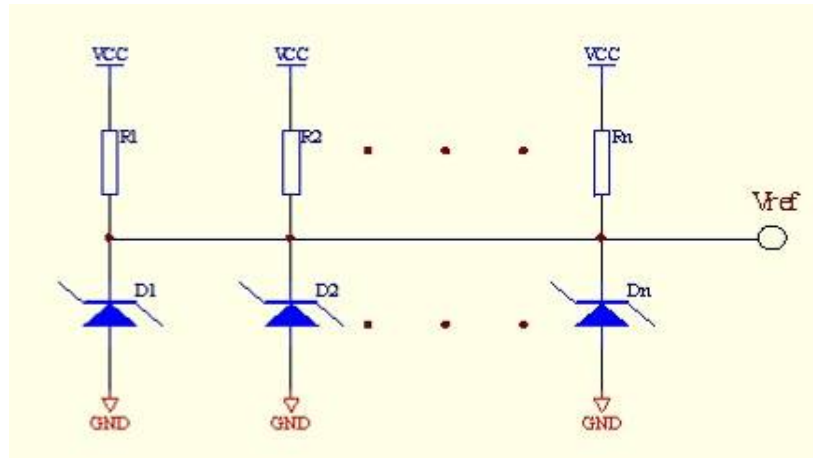
$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{2(\lambda_T + \lambda_{REL}) + (2\lambda_T + \lambda_{REL}) e^{-\lambda_T t}}{(2 - e^{-\lambda_T t})}$$

$$T_{SR} = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} (2e^{-(\lambda_T + \lambda_{REL}) t} - e^{-(2\lambda_T + \lambda_{REL}) t}) dt =$$

$$= \frac{2}{\lambda_T + \lambda_{REL}} - \frac{1}{2\lambda_T + \lambda_{REL}} = 190476h \approx 21,7 \text{ godina} \quad (8.2.5)$$

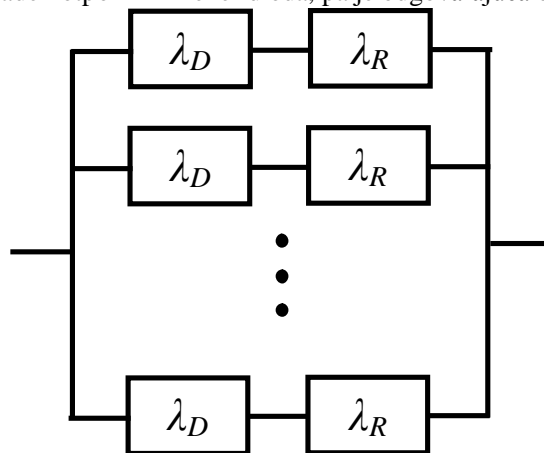
$$R_K(t = 5 \text{ god}) = (2 - e^{-\lambda_T t}) e^{-(\lambda_{REL} + \lambda_T) t} = (2 - e^{-\lambda_T \cdot 5 \cdot 365 \cdot 24h}) e^{-(\lambda_{REL} + \lambda_T) \cdot 5 \cdot 365 \cdot 24h} =$$

$$= 0,801846 \approx 80,2\% \quad (8.2.6)$$



8.2. Izvor referentnog napona

Kolo sa slike 8.2 će ispravno raditi ako ispravno radi bar jedna od n grana. Za ispravan rad jedne grane potrebno je da ispravno rade i otpornik i Zener dioda, pa je odgovarajuća blok šema pouzdanosti:



$$R(t) = 1 - (1 - R_D R_R)^n = 1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (R_D R_R)^k = 1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (e^{-\lambda_D t} e^{-\lambda_R t})^k \quad (8.2.7)$$

$$R(t) = 1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-k(\lambda_D + \lambda_R)t} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-k(\lambda_D + \lambda_R)t} \quad (8.2.8)$$

$$f(t) = -dR(t)/dt = (\lambda_D + \lambda_R) \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k k e^{-k(\lambda_D + \lambda_R)t} \quad (8.2.9)$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = (\lambda_D + \lambda_R) \frac{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k k e^{-(k-1)(\lambda_D + \lambda_R)t}}{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-(k-1)(\lambda_D + \lambda_R)t}} \quad (8.2.10)$$

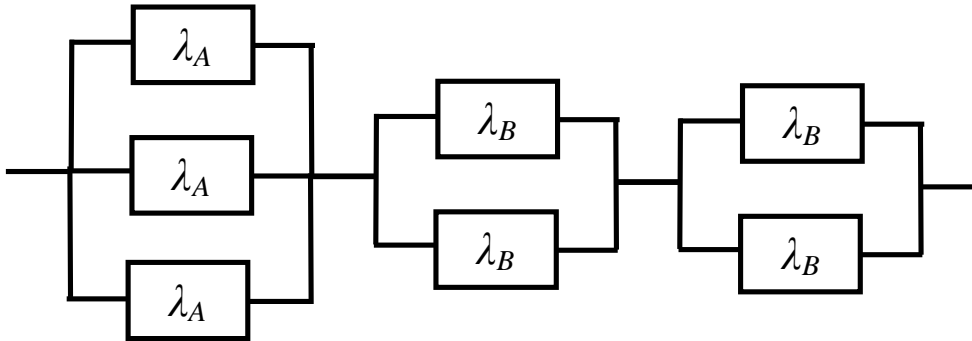
$$T_{SR} = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-k(\lambda_D + \lambda_R)t} \right) dt = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^{\infty} e^{-k(\lambda_D + \lambda_R)t} dt \quad (8.2.11)$$

$$T_{SR} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{k(\lambda_D + \lambda_R)} \quad (8.2.12)$$

Zadatak 8.3

Jedan redundovani elektronski sistem sastoji se od tri bloka A, 2 bloka B i 2 bloka C. Za ispravan rad tog sistema neophodno je da istovremeno ispravno rade bar po jedan od blokova A, B i C. Naći srednje vreme rada do otkaza ovog sistema, ako je $\lambda_A = 2\lambda_B = 2\lambda_C = 10^{-6}$ 1/h.

Prema uslovu zadatka formiramo šemu pouzdanosti:



$$R = (R_A \parallel R_A \parallel R_A)(R_B \parallel R_B)(R_C \parallel R_C) \quad (8.3.1)$$

$$R(t) = (1 - (1 - R_A)^3)(1 - (1 - R_B)^2)(1 - (1 - R_C)^2) \quad (8.3.2)$$

$$R(t) = (1 - (1 - R_A)^3)(1 - (1 - R_B)^2)(1 - (1 - R_C)^2) = \quad (8.3.3)$$

$$= (3R_A - 3R_A^2 + R_A^3)(2R_B - R_B^2)(2R_C - R_C^2) \quad (8.3.4)$$

$$R(t) = (3e^{-\lambda_A t} - 3e^{-2\lambda_A t} + e^{-3\lambda_A t})(2e^{-\lambda_B t} - e^{-2\lambda_B t})(2e^{-\lambda_C t} - e^{-2\lambda_C t})$$

Kako je $\lambda_A = 2\lambda_B = 2\lambda_C$ imamo:

$$R(t) = (3e^{-2\lambda_B t} - 3e^{-4\lambda_B t} + e^{-6\lambda_B t})(2e^{-\lambda_B t} - e^{-2\lambda_B t})(2e^{-\lambda_B t} - e^{-2\lambda_B t}) \quad (8.3.5)$$

$$R(t) = (3e^{-2\lambda_B t} - 3e^{-4\lambda_B t} + e^{-6\lambda_B t})(4e^{-2\lambda_B t} - 4e^{-3\lambda_B t} + e^{-4\lambda_B t}) \quad (8.3.6)$$

$$R(t) = (3e^{-2\lambda_B t} - 3e^{-4\lambda_B t} + e^{-6\lambda_B t})(4e^{-2\lambda_B t} - 4e^{-3\lambda_B t} + e^{-4\lambda_B t}) \quad (8.3.7)$$

$$R(t) = 12e^{-4\lambda_B t} - 12e^{-5\lambda_B t} - 9e^{-6\lambda_B t} + 12e^{-7\lambda_B t} + e^{-8\lambda_B t} - 4e^{-9\lambda_B t} + e^{-10\lambda_B t} \quad (8.3.8)$$

$$T_{SR} = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} (12e^{-4\lambda_B t} - 12e^{-5\lambda_B t} - 9e^{-6\lambda_B t} + 12e^{-7\lambda_B t} + e^{-8\lambda_B t} - 4e^{-9\lambda_B t} + e^{-10\lambda_B t}) dt \quad (8.3.9)$$

$$T_{SR} = \frac{12}{4\lambda_B} - \frac{12}{5\lambda_B} - \frac{9}{6\lambda_B} + \frac{12}{7\lambda_B} + \frac{1}{8\lambda_B} - \frac{4}{9\lambda_B} + \frac{1}{10\lambda_B} \quad (8.3.10)$$

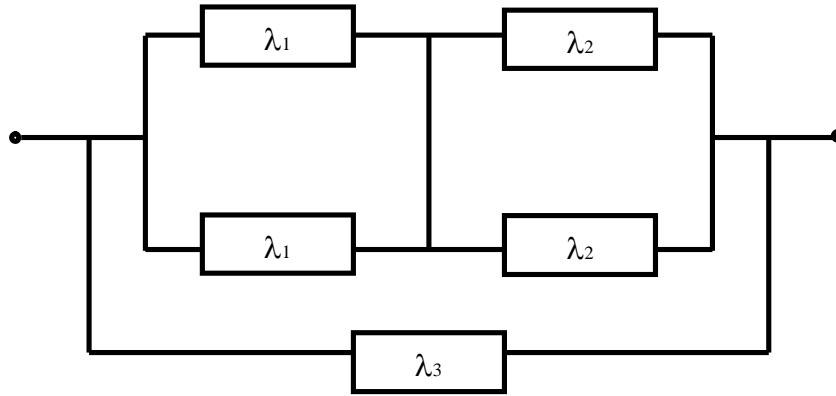
$$T_{SR} = \frac{1}{\lambda_B} \left(\frac{12}{4} - \frac{12}{5} - \frac{9}{6} + \frac{12}{7} + \frac{1}{8} - \frac{4}{9} + \frac{1}{10} \right) \approx \frac{0,5948}{\lambda_B} \quad (8.3.11)$$

$$T_{SR} = \frac{1}{\lambda_B} \left(\frac{12}{4} - \frac{12}{5} - \frac{9}{6} + \frac{12}{7} + \frac{1}{8} - \frac{4}{9} + \frac{1}{10} \right) \approx \frac{0,5948}{\lambda_B} \quad (8.3.12)$$

$$T_{SR} \approx 1,19 \cdot 10^6 h \approx 135,8 \text{ godina} \quad (8.3.13)$$

Zadatak 8.4

Za električno kolo čija je blok šema pouzdanosti data na slici, odrediti pouzdanost $R(t)$, intenzitet otkaza $\lambda(t)$ i funkciju gustine raspodele otkaza $f(t)$ i skicirati ove veličine. Naći srednje vreme bez-otkaznog rada T_{sr} sistema sa slike, ako je $\lambda_3 = 2\lambda_1 = 4\lambda_2 = 10^{-6} \text{ 1/h}$.



$$R = [(R_1 \parallel R_1)(R_2 \parallel R_2)] \parallel R_3 \quad (8.4.1)$$

$$R(t) = 1 - [1 - (1 - (1 - R_1)^2)](1 - (1 - R_2)^2)(1 - R_3) \quad (8.4.2)$$

$$R(t) = 1 - [1 - (2R_1 - R_1^2)(2R_2 - R_2^2)](1 - R_3) \quad (8.4.3)$$

$$R(t) = 1 - [1 - 4R_1R_2 + 2R_1R_2^2 + 2R_2R_1^2 - R_1^2R_2^2](1 - R_3) \quad (8.4.4)$$

$$R(t) = 4R_1R_2 - 2R_1R_2^2 - 2R_2R_1^2 + R_1^2R_2^2 + R_3 - 4R_1R_2R_3 + 2R_1R_2^2R_3 + 2R_2R_1^2R_3 - R_1^2R_2^2R_3 \quad (8.4.5)$$

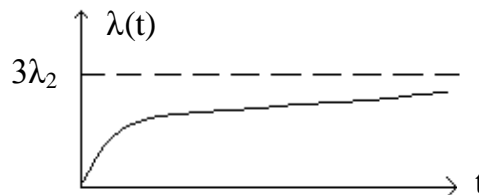
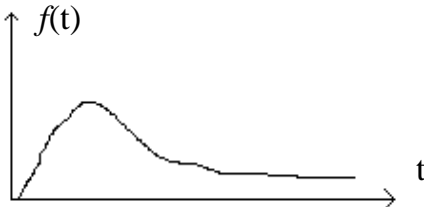
$$R(t) = 4e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} - 2e^{-\lambda_1 t} e^{-2\lambda_2 t} - 2e^{-2\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} + e^{-2\lambda_1 t} e^{-2\lambda_2 t} + \quad (8.4.6)$$

$$+ e^{-\lambda_3 t} - 4e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} + 2e^{-\lambda_1 t} e^{-2\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} + 2e^{-2\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} - e^{-2\lambda_1 t} e^{-2\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} \quad (8.4.7)$$

$$R(t) = 4e^{-3\lambda_2 t} - 2e^{-4\lambda_2 t} - 2e^{-5\lambda_2 t} + e^{-6\lambda_2 t} + e^{-4\lambda_2 t} - 4e^{-7\lambda_2 t} + 2e^{-8\lambda_2 t} + 2e^{-9\lambda_2 t} - e^{-10\lambda_2 t} \quad (8.4.8)$$

$$f(t) = -dR(t)/dt = \lambda_2 (12 - 4e^{-\lambda_2 t} - 10e^{-2\lambda_2 t} + 6e^{-3\lambda_2 t} - 28e^{-4\lambda_2 t} + 16e^{-5\lambda_2 t} + 18e^{-6\lambda_2 t} - 10e^{-7\lambda_2 t}) e^{-3\lambda_2 t} \quad (8.4.9)$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \lambda_2 \frac{12 - 4e^{-\lambda_2 t} - 10e^{-2\lambda_2 t} + 6e^{-3\lambda_2 t} - 28e^{-4\lambda_2 t} + 16e^{-5\lambda_2 t} + 18e^{-6\lambda_2 t} - 10e^{-7\lambda_2 t}}{4 - e^{-\lambda_2 t} - 2e^{-2\lambda_2 t} + e^{-3\lambda_2 t} - 4e^{-4\lambda_2 t} + 2e^{-5\lambda_2 t} + 2e^{-6\lambda_2 t} - e^{-7\lambda_2 t}} \quad (8.4.10)$$



$$T_{SR} = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} (4e^{-3\lambda_2 t} - e^{-4\lambda_2 t} - 2e^{-5\lambda_2 t} + e^{-6\lambda_2 t} - 4e^{-7\lambda_2 t} + 2e^{-8\lambda_2 t} + 2e^{-9\lambda_2 t} - e^{-10\lambda_2 t}) dt \quad (8.4.11)$$

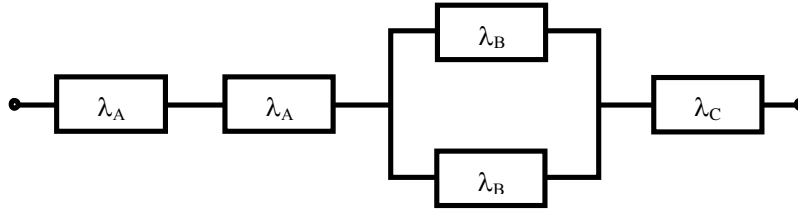
$$T_{SR} = \frac{4}{3\lambda_2} - \frac{1}{4\lambda_2} - \frac{2}{5\lambda_2} + \frac{1}{6\lambda_2} - \frac{4}{7\lambda_2} + \frac{2}{8\lambda_2} + \frac{2}{9\lambda_2} - \frac{1}{10\lambda_2} \quad (8.4.12)$$

$$T_{SR} \approx 2,6 \cdot 10^6 h \approx 296,8 \text{ godina} \quad (8.4.13)$$

Zadatak 8.5

Jedan telekomunikacioni uređaj se sastoji od 2 elementa A, dva elementa B i jednog elementa C. Za ispravan rad tog uređaja, potrebno je da istovremeno ispravno rade element C, oba elementa A i bar jedan od elemenata B. Odrediti pouzdanost $R(t)$, intenzitet otkaza $\lambda(t)$ i funkciju gustine raspodele otkaza $f(t)$ i skicirati ove veličine. Ako je $\lambda_A = 0,5, \lambda_B = 0,8, \lambda_C = 10^{-4}$ 1/h odrediti pouzdanost u intervalu rada od 10000 sati i srednje vreme rada do otkaza.

Šema pouzdanosti za ovaj uređaj je:



$$R = R_A^2 (R_B \parallel R_B) R_C = R_A^2 (1 - (1 - R_B^2)) R_C = R_A^2 (2R_B - R_B^2) R_C \quad (8.5.1)$$

$$R(t) = 2R_A^2 R_B R_C - R_A^2 R_B^2 R_C \quad (8.5.2)$$

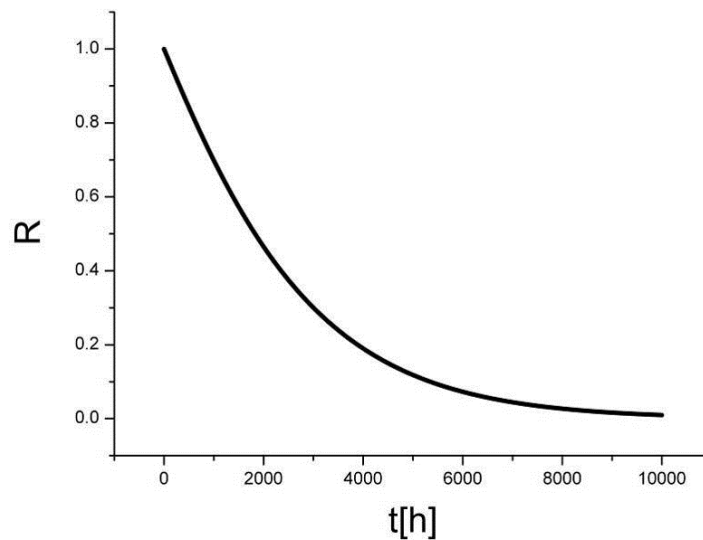
$$R(t) = 2e^{-2\lambda_A t} e^{-\lambda_B t} e^{-\lambda_C t} - e^{-2\lambda_A t} e^{-2\lambda_B t} e^{-\lambda_C t} \quad (8.5.3)$$

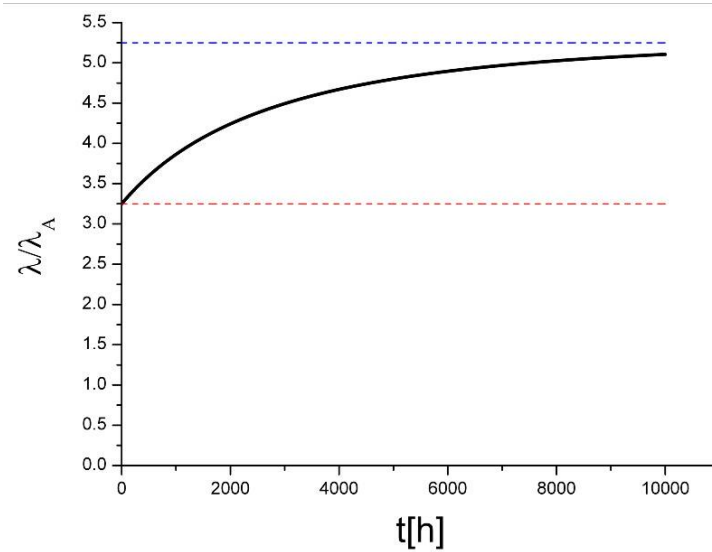
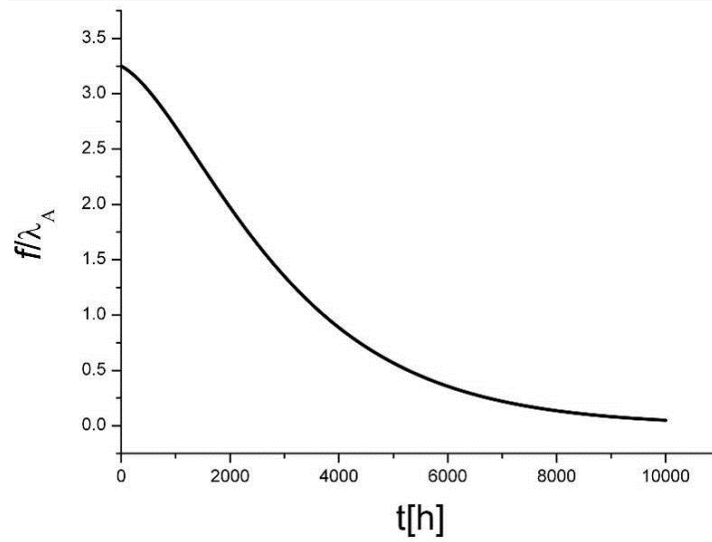
$$\lambda_A = 0,5, \lambda_B = 0,8, \lambda_C = 10^{-4} \Rightarrow \lambda_B = 2\lambda_A \wedge \lambda_C = 1,25\lambda_A \quad (8.5.4)$$

$$R(t) = 2e^{-2\lambda_A t} e^{-2\lambda_A t} e^{-1,25\lambda_A t} - e^{-2\lambda_A t} e^{-4\lambda_A t} e^{-1,25\lambda_A t} = 2e^{-5,25\lambda_A t} - e^{-7,25\lambda_A t} \quad (8.5.5)$$

$$f(t) = -dR(t) / dt = \lambda_A (10,5 - 7,25e^{-2\lambda_A t}) e^{-5,25\lambda_A t} \quad (8.5.6)$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \lambda_A \frac{(10,5 - 7,25e^{-2\lambda_A t}) e^{-5,25\lambda_A t}}{2e^{-5,25\lambda_A t} - e^{-7,25\lambda_A t}} = \lambda_A \frac{10,5 - 7,25e^{-2\lambda_A t}}{2 - e^{-2\lambda_A t}} \quad (8.5.7)$$





$$R(t = 10000h) = 2e^{-5,25} - e^{-7,25} = 0,00978486 \approx 0,1\% \quad (8.5.8)$$

$$T_{SR} = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} (2e^{-5,25\lambda_A t} - e^{-7,25\lambda_A t}) dt \quad (8.5.9)$$

$$T_{SR} = \frac{2}{5,25\lambda_A} - \frac{1}{7,25\lambda_A} = \frac{1}{\lambda_A} \left(\frac{2}{5,25} - \frac{1}{7,25} \right) = 2430h \quad (8.5.10)$$

Zadatak 8.6

U sistemu telekontrola mogu biti primenjene šeme redundovanja kanala po sistemu "dva od tri" ili "tri od pet" ispravna. Intenzitet otkaza jednog kanala je $\lambda = 10^{-5}$ 1/h.

- Odrediti koja šema je bolja sa stanovišta pouzdanosti u toku vremena $t_i = 100$ h;
- Odrediti srednje vreme rada do otkaza T_{sr} za oba slučaja;
- Odrediti intenzitet otkaza $\lambda(t)$ sistema u oba slučaja i skicirati za slučaj redundovanja kanala po sistemu "dva od tri";
- Odrediti funkciju gustine otkaza $f(t)$ sistema u oba slučaja i skicirati za slučaj redundovanja kanala po sistemu "dva od tri".

Razmotrimo najpre šemu redundovanja kanala po sistemu "dva od tri".

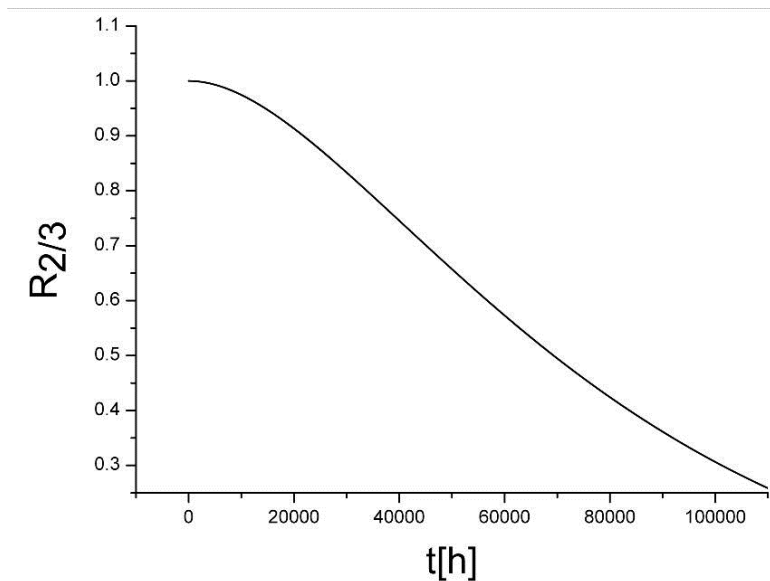
Pouzdanost jednog kanala je $R(t) = e^{-\lambda t}$. Sistem radi ako rade sva tri kanala, što se dešava sa verovatnoćom R^3 . Takođe sistem radi ako je jedan pokvaren a dva ispravna, što se dešava sa verovatnoćom $(1-R)R^2$, pri čemu su moguće tri kombinacije. Pokvaren je prvi kanal a drugi i treći ispravni, ili je drugi pokvaren a prvi i treći ispravni ili je treći pokvaren a prva dva ispravna. Dakle pouzdanost sistema "dva od tri" je:

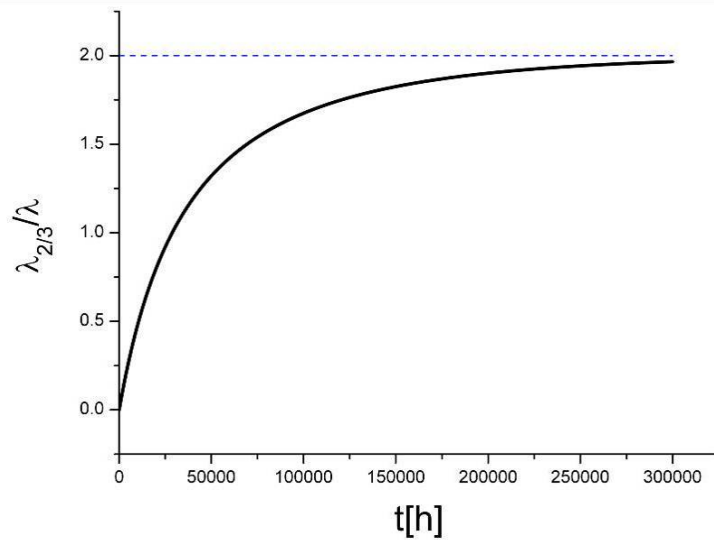
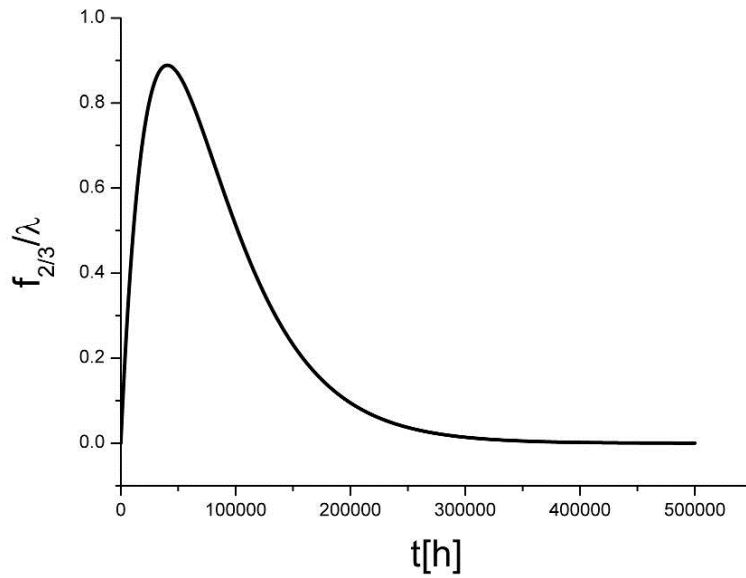
$$R_{2/3}(t) = R^3 + \binom{3}{1}(1-R)R^2 \quad (8.6.1)$$

$$R_{2/3}(t) = 3R^2 - 2R^3 = 3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t} \quad (8.6.2)$$

$$f_{2/3}(t) = -\frac{dR_{2/3}}{dt} = 6\lambda e^{-2\lambda t} - 6\lambda e^{-3\lambda t} = 6\lambda(1 - e^{-\lambda t})e^{-2\lambda t} \quad (8.6.3)$$

$$\lambda_{2/3}(t) = \frac{f_{2/3}(t)}{R_{2/3}(t)} = \frac{6\lambda(1 - e^{-\lambda t})e^{-2\lambda t}}{3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}} = 6\lambda \frac{1 - e^{-\lambda t}}{3 - 2e^{-\lambda t}} \quad (8.6.4)$$





$$R_{2/3}(t = 100h) = 3e^{-2 \cdot 10^{-3}} - 2e^{-3 \cdot 10^{-3}} = 0,999997 \quad (8.6.5)$$

$$T_{SR} = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} (3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}) dt = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{5}{6} \cdot 10^5 h \quad (8.6.6)$$

Za šemu redundovanja kanala po sistemu "tri od pet" pouzdanost je:

$$R_{3/5}(t) = R^5 + \binom{5}{1}(1-R)R^4 + \binom{5}{2}(1-R)^2 R^3 \quad (8.6.7)$$

$$R_{3/5}(t) = 6R^5 - 15R^4 + 10R^3 = 6e^{-5\lambda t} - 15e^{-4\lambda t} + 10e^{-3\lambda t} \quad (8.6.8)$$

$$T_{SR} = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} (6e^{-5\lambda t} - 15e^{-4\lambda t} + 10e^{-3\lambda t}) dt = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{6}{5} - \frac{15}{4} + \frac{10}{3} \right) = \frac{47}{60} \frac{1}{\lambda} = \frac{47}{60} \cdot 10^5 h \quad (8.6.9)$$

$$R_{3/5}(t = 100h) = 6e^{-5 \cdot 10^{-3}} - 15e^{-4 \cdot 10^{-3}} + 10e^{-3 \cdot 10^{-3}} = 0,99999999 \quad (8.6.10)$$

Dakle veća je verovatnoća da će u toku 100 sati rada ispravno raditi šema "tri od pet" u odnosu na redundovanje kanala po sistemu "dva od tri". Sa druge strane vidi se da redundovanje kanala po sistemu "dva od tri" ima veće srednje vreme rada do otkaza.

$$f_{3/5}(t) = -\frac{dR_{3/5}}{dt} = 30\lambda(1 - 2e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t})e^{-3\lambda t} \quad (8.6.11)$$

$$\lambda_{3/5}(t) = \frac{f_{3/5}(t)}{R_{3/5}(t)} = 30\lambda \frac{1 - 2e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t}}{10 - 15e^{-\lambda t} + 6e^{-2\lambda t}} \quad (8.6.12)$$

Zadatak 8.7

Analizom otkaza neke aparature došlo se do funkcije gustine raspodele vremena do otkaza u obliku:

$f(t) = C_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$, gde su C_1 , C_2 , λ_1 i λ_2 konstante. Odrediti ostale kvantitativne pokazatelje pouzdanosti ove aparature, ako je $C_1 = 0.4$, $\lambda_2 = 1.2 \lambda_1 = 1.2 \cdot 10^{-6}$ 1/h.

$$f(t) = -dR(t)/dt = C_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \quad (8.7.1)$$

$$dR(t) = -(C_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) dt \quad (8.7.2)$$

$$-\int_0^t (C_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) dt = \int_0^t dR \quad (8.7.3)$$

$$C_1 e^{-\lambda_1 t} \Big|_0^t + C_2 e^{-\lambda_2 t} \Big|_0^t = R(t) - R(0) = R(t) - 1 \quad (8.7.4)$$

$$C_1 e^{-\lambda_1 t} - C_1 + C_2 e^{-\lambda_2 t} - C_2 = R(t) - 1 \quad (8.7.5)$$

$$t \rightarrow \infty \mapsto R \rightarrow 0 \quad (8.7.6)$$

$$C_1 + C_2 = 1 \quad (8.7.7)$$

$$R(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} \quad (8.7.8)$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{C_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}} \quad (8.7.9)$$

$$T_{SR} = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} (C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}) dt = \frac{C_1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2} \quad (8.7.10)$$

$$T_{SR} = 9 \cdot 10^5 h \quad (8.7.11)$$

Zadatak 8.8

Funkcija gustine raspodele vremena do otkaza nekog uređaja data je relacijom:

$$f(t) = \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

Ako je srednje vreme rada do otkaza $T_{sr}=2 \cdot 10^3$ h odrediti σ . Odrediti pouzdanost, $R(t)$ i intenzitet otkaza, $\lambda(t)$ i skicirati ga. Kada bi intenzitet otkaza posmatranog uređaja bio konstantan i iznosio $\lambda = 10^{-3}$ 1/h, koliko bi bilo srednje vreme rada do otkaza tog uređaja i u kojem vremenskom periodu bi pouzdanosti uređaja bile iste? Kada kod elektronskih uređaja nastupa zadata zavisnost $f(t)$ i zašto?

$$f(t) = \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (8.8.1)$$

$$f(t) = -dR(t) / dt \quad (8.8.2)$$

$$dR(t) = -\frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \quad (8.8.3)$$

$$\int_0^t dR = -\int_0^t \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \quad (8.8.4)$$

$$R(t) - 1 = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^t = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} - 1 \quad (8.8.5)$$

$$R(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (8.8.6)$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{t}{\sigma^2} \quad (8.8.7)$$

$$T_{SR} = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \sqrt{2}\sigma \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{2}\sigma I \quad (8.8.8)$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (8.8.9)$$

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy \quad (8.8.10)$$

Ovaj integral se može rešiti u polarnom koordinatnom sistemu. Pošto se integracija obavlja u prvom kvadrantu koordinata ρ se kreće od 0 do $+\infty$ a φ od 0 do $\pi/2$.

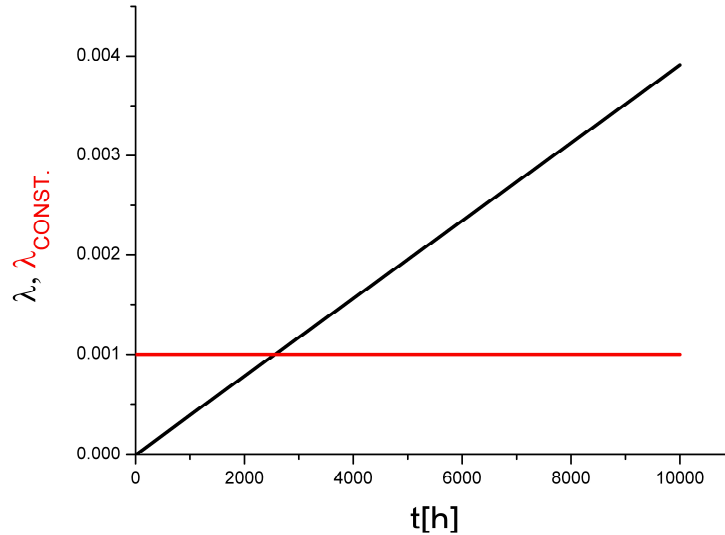
$$I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} d\rho d\varphi \quad (8.8.11)$$

Pošto je: $x = \rho \cos \varphi$ i $y = \rho \sin \varphi$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \quad (8.8.12)$$

$$I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \rho e^{-\rho^2} d\rho d\varphi = \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho \int_0^{\pi/2} d\varphi \quad (8.8.13)$$

$$I^2 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} 2\rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{4} \left(-e^{-\rho^2} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4} \quad (8.8.14)$$



8.1. Zavisnost λ od vremena

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (8.8.15)$$

$$T_{SR} = \sigma \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \quad (8.8.16)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_{SR} \approx 1,6 \cdot 10^3 h \quad (8.8.17)$$

$$\lambda(t) = \frac{t}{2,56h^2} \cdot 10^{-6} \quad (8.8.18)$$

$$\lambda(t) = \lambda_{CONST.} \Rightarrow \frac{t}{2,56h^2} \cdot 10^{-6} = 10^{-3} \frac{1}{h} \Rightarrow t = 2560h \quad (8.8.19)$$

Ovakav slučaj zavisnosti intenziteta otkaza od vremena nastupa kada raste učestanost otkaza sa vremenom zbog starenja i istrošenosti.

Zadatak 8.9

U toku $t = 3000$ časova probnog ispitivanja partije od $N_0 = 1000$ elektronskih naprava, otkazalo je $n(t) = 80$.

a) Odrediti pouzdanost $R(t)$ i funkciju gustine raspodele vremena do otkaza $f(t)$ navedenih naprava u ispitivanom intervalu vremena.

b) Koliki su $f(t)$ i intenzitet otkaza $\lambda(t)$ u intervalu nastavka ispitivanja od $\Delta t = 1000h$ (između 3000 i 4000 časova) ako je u tom vremenskom intervalu otkazalo još $\Delta n(t) = 50$ naprava.

a) Po definiciji je

$$R(t) = (N_0 - n(t)) / N_0 \text{ i } F(t) = n(t) / N_0 \quad (8.9.1)$$

$$f(t) = \Delta F(t) / \Delta t = \frac{\left(\frac{n(t)}{N_0} - F(t=0) \right)}{\Delta t} \quad (8.9.2)$$

$$F(t=0) = 0 \Rightarrow f(t) = \frac{n(t)}{N_0 \Delta t} \quad (8.9.3)$$

$$R(t = 3000h) = \frac{1000 - 80}{1000} = 0,92 \Rightarrow F(t = 3000h) = 0,08 \quad (8.9.4)$$

$$f(t = 3000h) = \frac{80}{1000 \cdot 3000h} = 26,67 \cdot 10^{-6} h^{-1} \quad (8.9.5)$$

b) U intervalu nastavka ispitivanja $f(t)$ i intenzitet otkaza $\lambda(t)$ iznose:

$$f(\Delta t) = \frac{\Delta F(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{\Delta n(\Delta t)}{N_0 \Delta t} = \frac{50}{(1000-80)1000h} \approx 54 \cdot 10^{-6} h^{-1} \quad (8.9.6)$$

$$R(\Delta t) = \frac{(N_0 - \Delta n(t))}{N_0} = \frac{870}{920} = 0,9456 \quad (8.9.7)$$

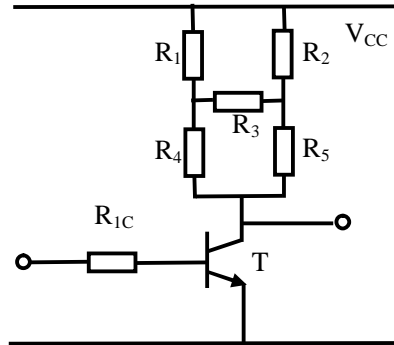
$$\lambda(\Delta t) = \frac{f(\Delta t)}{R(\Delta t)} = \frac{\frac{\Delta n(\Delta t)}{N_0 \Delta t}}{\frac{(N_0 - \Delta n(t))}{N_0}} = \frac{\Delta n(\Delta t)}{(N_0 - \Delta n(t)) \Delta t} = \frac{50}{870 \cdot 1000h} = 57,5 \cdot 10^{-6} h^{-1} \quad (8.9.8)$$

Zadatak 8.10

Invertor prikazan na slici sadrži tranzistor sa velikim strujnim pojačanjem tako da invertor radi ispravno kada je otpornost u kolektoru u opsegu od $20k\Omega$ do $200k\Omega$. Ako je $R_i=50k\Omega$ odrediti:

- pouzdanost invertora $R(t)$;
- srednje vreme rada do otkaza T_{sr} invertora;
- intenzitet otkaza $\lambda(t)$ invertora;
- funkciju gustine otkaza $f(t)$ invertora;
- Koliko je srednje vreme rada do otkaza u slučaju da se u kolektoru tranzistora nalazi samo jedan otpornik.

Intenziteti otkaza svih otpornika su jednaki $\lambda_R = 5 \cdot 10^{-7}$ 1/h a intenzitet otkaza tranzistora je $\lambda_T = 10^{-6}$ 1/h. Otkaz otpornika simulirati otvorenom vezom.



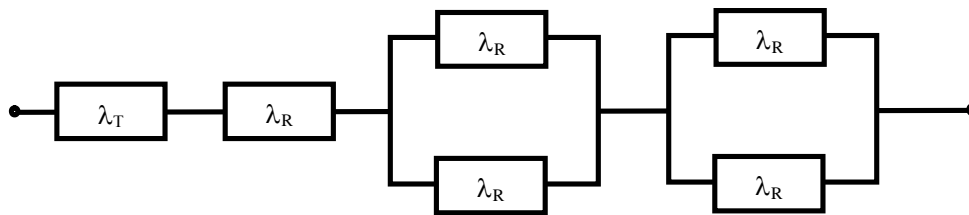
Analizom otporničke mreže u kolektoru tranzistora vidi se da je minimalna otpornost $R_{MIN} = 50k\Omega$, kada otkaze otpornik R_3 , a maksimalna $R_{MAX} = 150k\Omega$, kada istovremeno otkazu R_1 i R_5 ili R_2 i R_4 . Dakle invertor će otkazati ako otpornička mreža u kolektoru postane otvorena veza. Šema pouzdanosti za ovaj invertor ne može se nacrtati kombinacijom rednih i paralelnih veza elemenata. Da bismo mogli nacrtati šemu pomoću rednih i paralelnih veza iskoristićemo Bajesovu formulu i pravilo totalne verovatnoće.

Verovatnoća da se dogodi događaj A jednak je sumi proizvoda verovatnoća da se dogodi hipoteza H_i i verovatnoće da se dogodi A pod uslovom da se dogodila hipoteza H_i , odnosno:

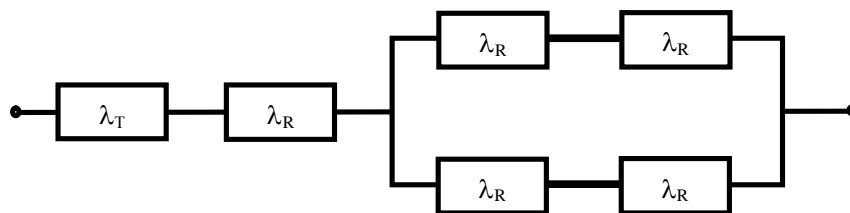
$$P(A) = \sum_i P(H_i)P(A/H_i), \text{ pri čemu važi } \sum_i P(H_i) = 1.$$

U slučaju invertora hipoteza H_1 je da je R_3 ispravan, a hipoteza H_2 je da je R_3 otkazao.

Sada je pri važenju hipoteze H_1 šema pouzdanosti:



Pri važenju hipoteze H_2 šema pouzdanosti je:



$$R(t) = R_T R_{RC} \left[R_R \left(1 - (1 - R_R)^2 \right)^2 + (1 - R_R) \left(1 - (1 - R_R^2)^2 \right) \right] \quad (8.10.1)$$

$$R_R = R_{RC} = e^{-\lambda_R t}, R_T = e^{-\lambda_T t} = e^{-2\lambda_R t} \quad (8.10.2)$$

$$R(t) = 2e^{-8\lambda_R t} - 5e^{-7\lambda_R t} + 2e^{-6\lambda_R t} + 2e^{-5\lambda_R t} \quad (8.10.3)$$

$$T_{SR} = \int_0^{\infty} R(t) dt = \frac{2}{8\lambda_R} - \frac{5}{7\lambda_R} + \frac{2}{6\lambda_R} + \frac{2}{5\lambda_R} = \frac{0,269}{\lambda_R} \approx 538095h \quad (8.10.4)$$

$$f(t) = -dR(t) / dt = \lambda_R \left(16e^{-3\lambda_R t} - 35e^{-2\lambda_R t} + 12e^{-\lambda_R t} + 10 \right) e^{-5\lambda_R t} \quad (8.10.5)$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \lambda_R \frac{16e^{-3\lambda_R t} - 35e^{-2\lambda_R t} + 12e^{-\lambda_R t} + 10}{2e^{-3\lambda_R t} - 5e^{-2\lambda_R t} + 2e^{-\lambda_R t} + 2} \quad (8.10.6)$$

Ako bi u kolektoru tranzistora bio samo jedan otpornik pouzdanost bi bila:

$$R_1(t) = R_T R_{RC} R_R = e^{-4\lambda_R t}, \quad (8.10.7)$$

a srednje vreme rada do otkaza:

$$T_{SR1} = \int_0^{\infty} R_1(t) dt = \frac{1}{4\lambda_R} = 500000h < T_{SR} \quad (8.10.8)$$

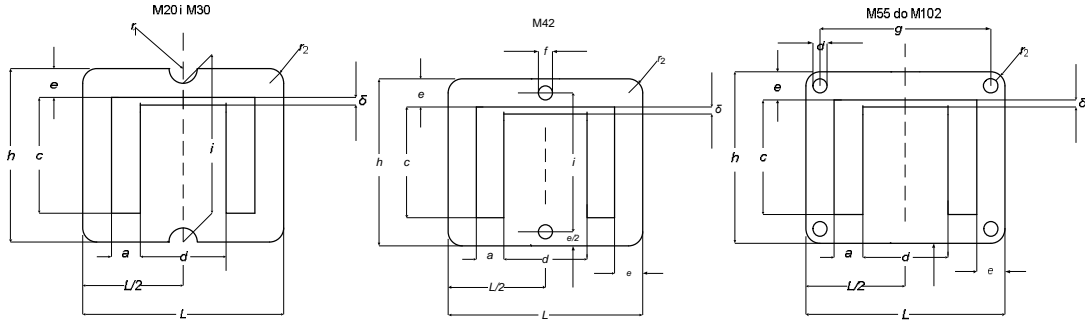
9 Dodaci

Glava sadrži tabele, grafike i slike potrebne za rešavanje zadataka.

Parametri za izolovanu bakarnu žicu

Spoljnji prečnik bakarne žice izolovane lakom(L), svilom(S) ili pamukom(P)							
dž [mm]	Presek gole žice [mm ²]	ds za L [mm]	ds za L+S [mm]	ds za 1xS [mm]	ds za 2xS [mm]	ds za 1xP [mm]	ds za 2xP [mm]
0,03	0,0007	0,042	0,077	0,065	0,100	-	-
0,04	0,0013	0,052	0,087	0,075	0,110	-	-
0,05	0,0020	0,062	0,097	0,085	0,112	-	-
0,06	0,0028	0,075	0,110	0,095	0,130	-	-
0,07	0,0038	0,085	0,120	0,105	0,140	-	-
0,08	0,0050	0,095	0,130	0,115	0,150	-	-
0,09	0,0064	0,105	0,140	0,125	0,160	-	-
0,10	0,0078	0,115	0,150	0,135	0,170	0,20	0,26
0,11	0,0095	0,130	0,165	0,145	0,180	0,21	0,27
0,12	0,0113	0,140	0,175	0,155	0,190	0,22	0,28
0,13	0,0133	0,150	0,185	0,165	0,200	0,23	0,29
0,14	0,0154	0,160	0,195	0,175	0,210	0,24	0,30
0,15	0,0177	0,170	0,205	0,185	0,220	0,25	0,31
0,16	0,0201	0,180	0,215	0,195	0,230	0,26	0,32
0,18	0,0254	0,200	0,235	0,215	0,250	0,28	0,34
0,20	0,0314	0,220	0,255	0,235	0,270	0,30	0,36
0,22	0,0380	0,245	0,285	0,260	0,290	0,32	0,38
0,25	0,0491	0,275	0,315	0,290	0,320	0,35	0,41
0,28	0,0616	0,305	0,345	0,320	0,350	0,38	0,44
0,30	0,0707	0,325	0,365	0,340	0,370	0,40	0,46
0,32	0,0804	0,350	0,390	0,360	0,390	0,44	0,52
0,35	0,0962	0,380	0,420	0,390	0,420	0,47	0,55
0,38	0,1130	0,410	0,450	0,420	0,450	0,50	0,58
0,40	0,1260	0,430	0,470	0,440	0,470	0,53	0,60
0,42	0,1380	0,455	0,495	0,460	0,490	0,54	0,62
0,45	0,1590	0,485	0,525	0,490	0,520	0,57	0,65
0,48	0,1810	0,515	0,555	0,520	0,550	0,60	0,68
0,50	0,1960	0,535	0,575	0,540	0,570	0,62	0,70
0,55	0,2380	0,590	0,630	0,590	0,630	0,67	0,77
0,60	0,2930	0,640	0,680	0,640	0,680	0,72	0,82
0,65	0,3320	0,690	0,730	0,690	0,730	0,77	0,87
0,70	0,3850	0,740	0,780	0,740	0,780	0,82	0,92
0,75	0,4420	0,800	0,840	0,790	0,830	0,87	0,97
0,80	0,5030	0,850	0,890	0,840	0,880	0,92	1,02
0,85	0,5670	0,900	0,940	0,890	0,930	0,97	1,07
0,90	0,6360	0,950	0,990	0,940	0,980	1,02	1,12
0,95	0,7090	1,000	1,040	0,990	1,030	1,07	1,17
1,00	0,7850	1,050	1,090	1,040	1,080	1,12	1,22

Slika i specifikacija limova tima M

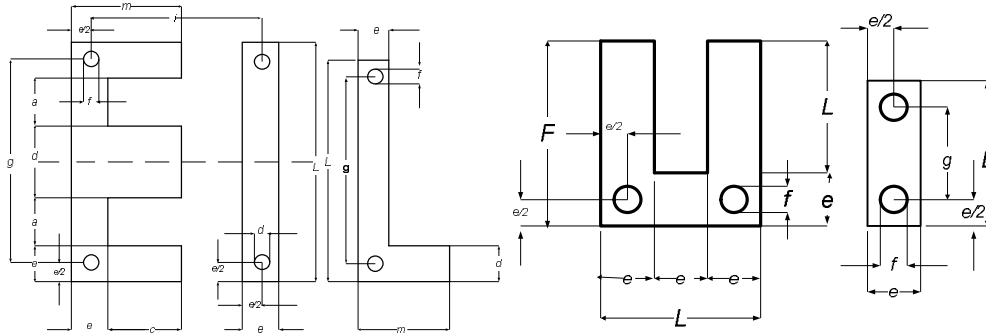


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13				14			
Lim	h	l	e	+	c	d	a	i	g	r1	r2	Debljina lima Δ				Medjugvoždje δ			
M20	20	20	3,5	-	13	5	4	20	-	1,4	1	0,05	0,1	-	-	0,3	-	-	-
M30	30	30	5	-	20	7	6,5	30	-	1,5	2	0,05	0,1	-	-	0,3	-	-	-
M42	42	42	6	3,2	30	12	9	36	-	-	2,5	0,05	0,1	0,35	-	-	0,5	1	-
M55	55	55	8,5	3,3	38	17	10,5	47	47	-	3	-	0,1	0,35	0,5	-	0,5	1	-
M65	65	65	10	4,3	45	20	12,5	56	56	-	3	-	0,1	0,35	0,5	-	0,5	1	-
M74	74	74	11,5	4,5	51	23	14	64	64	-	3	-	0,1	0,35	0,5	-	0,5	1	2
M85	85	85	14,5	4,5	56	29	13,5	75	75	-	5	-	0,1	0,35	0,5	-	0,5	1	2
M102	102	102	17	6	68	34	17	91	91	-	5	-	0,1	0,35	0,5	-	0,5	1	2

Vrednost sačinioca ispune gvoždjem za transformatorske limove

Debljina gvoždenog lima Δ [mm]	Sačinilac ispune f_e		
	Hartija 30 μ	Lak 20 μ	Atramentol 10 μ
0,35	0,91	0,92	0,97
0,50	0,94	0,95	0,98

Slika i specifikacija limova tipa E/I, L i U/I

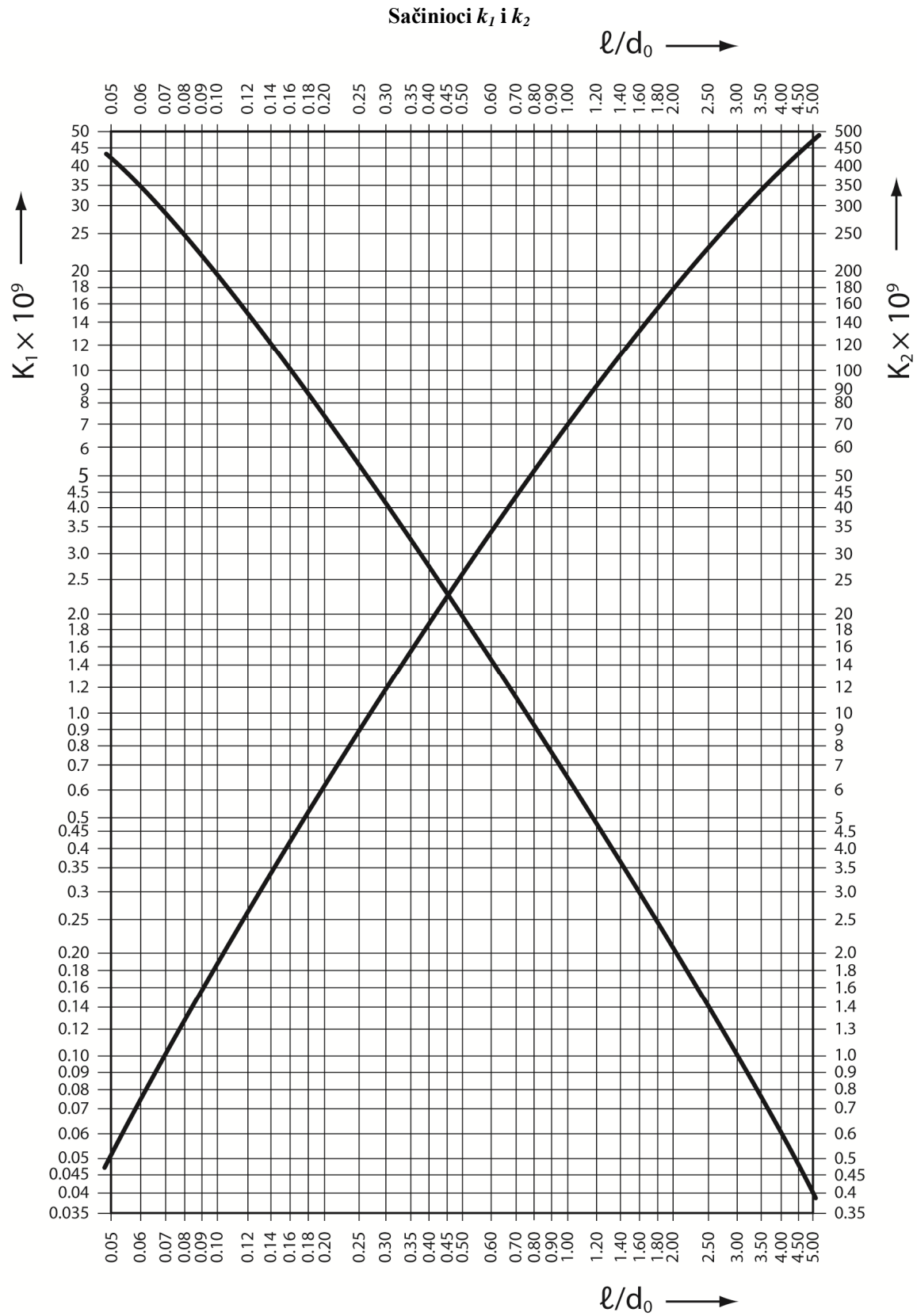


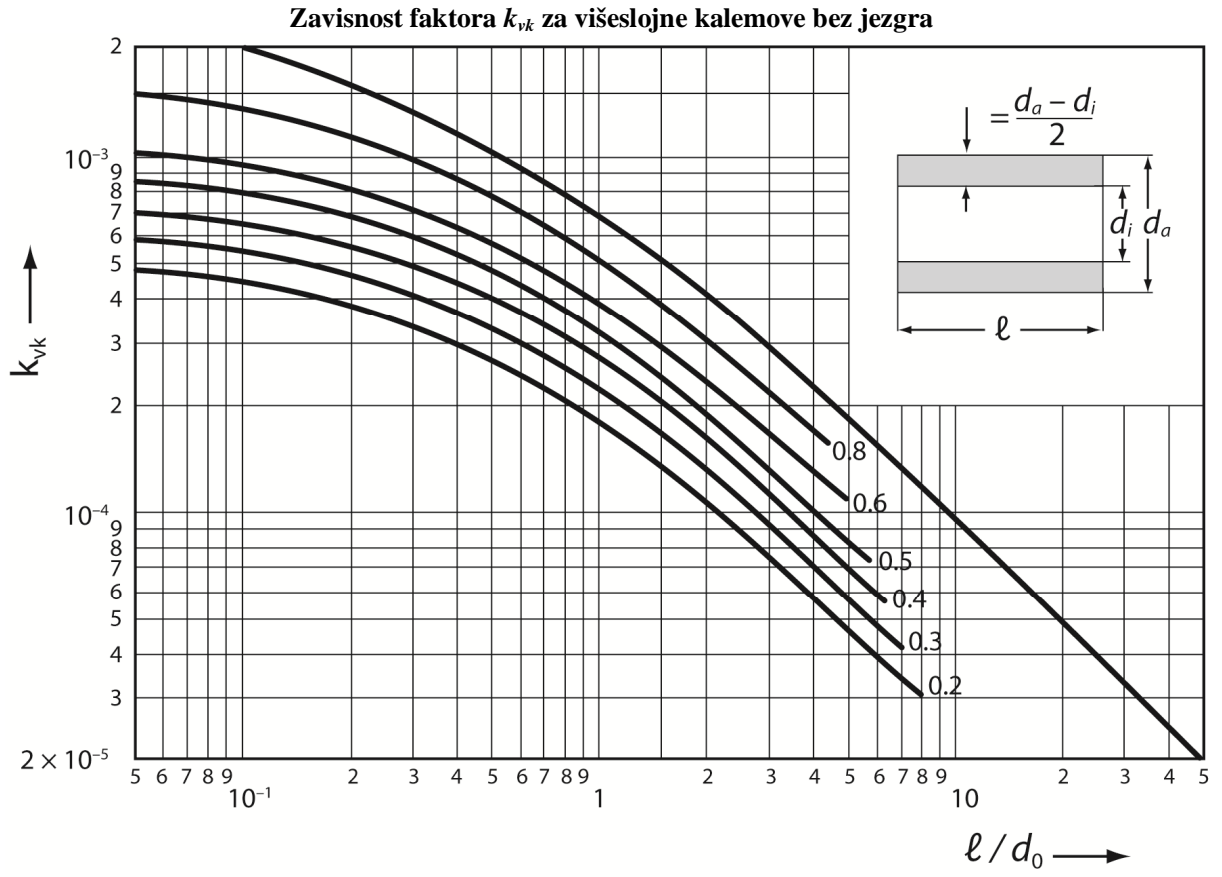
Lim	L	$m=i$	e	$+$	c	d	a	h	g	r	Debljina lima Δ		Visina sloja b	ušteda pri probijanju $2c=i$ i $e=a$	
E/I	42	42	28	7	3,5	21	14	7	35	35	0,35	0,5	14		
	48	48	32	8	3,5	24	16	8	40	40			16		
	54	54	36	9	3,5	27	18	9	45	45			18		
	60	60	40	10	3,5	30	20	10	50	50			20		
	66	66	44	11	4,5	33	22	11	55	55			22		
	78	78	52	13	4,5	39	26	13	65	65			26		
	84	84	56	14	4,5	42	28	14	70	70			28/42		
	92	92	61,5	12,5	4,5	49	25	21	74	80	4	25 35			
	106	106	70,5	14,5	5,5	56	29	24	85	94	5	30 45			
	130	130	87,5	17,5	6,6	70	35	30	105	115	6	-	-	35 45	
150	150	100	20	6,6	80	40	35	120	135	6	-	-	40 50		
	170	170	117,5	22,5	7,8	95	45	40	140	150	8	-	-	45 60 75	
L	59	59	13	5	2,8	-	9	-	-	50	-	0,35	-	7,5	
U/I	30	30	40	10	3,0	-	-	-	-	20	-	0,35	0,5	10 16	
	39	39	52	13	3,5	-	-	-	-	26	-			13 20	
	48	48	64	16	4,5	-	-	-	-	32	-			16 25	
	60	60	80	20	4,5	-	-	-	-	40	-			20 30	
	75	75	100	25	5,5	-	-	-	-	50	-			25 40	
	90	90	120	30	7,8	-	-	-	-	60	-			30 50	
	102	102	136	34	7,8	-	-	-	-	68	-			34 55	
114	114	152	38	11	-	-	-	-	76	-	38 62				

Korekcionni faktor za proračunavanje induktivnosti višeslojnih dužih kalemova

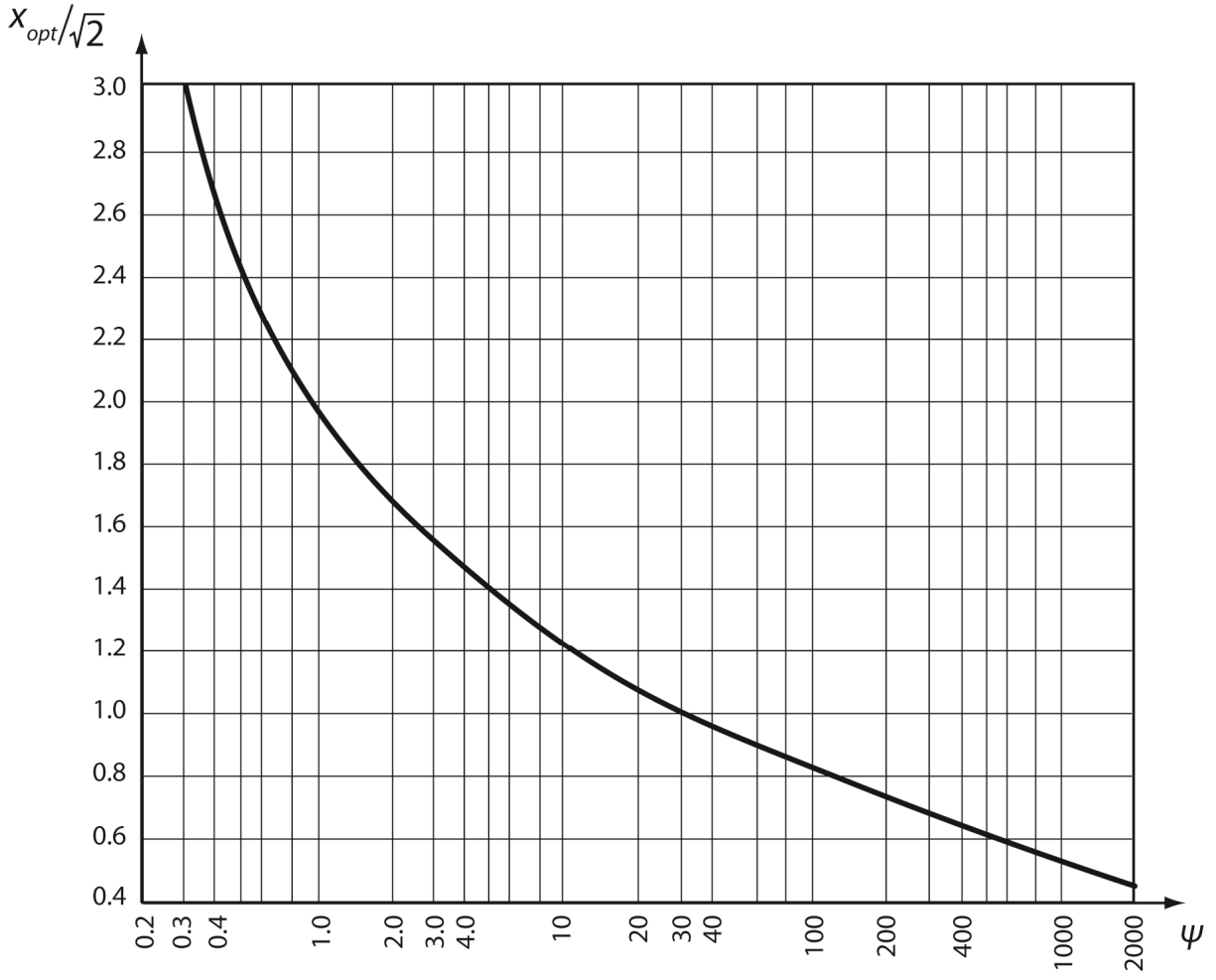
Korekcionni sačinilac K za proračunavanje induktivnosti kod višeslojnih cilindričnih dužih kalemova

l/h	K	l/h	K	l/h	K
1	0,0000	11	0,2844	21	0,3116
2	0,1202	12	0,2888	22	0,3131
3	0,1753	13	0,2927	23	0,3145
4	0,2076	14	0,2961	24	0,3157
5	0,2292	15	0,2991	25	0,3169
6	0,2446	16	0,3017	26	0,3180
7	0,2536	17	0,3041	27	0,3190
8	0,2656	18	0,3062	28	0,3200
9	0,2730	19	0,3082	29	0,3209
10	0,2792	20	0,3099	30	0,3218





Zavisnost x_{op} od pomoćne veličine Ψ



Zavisnost $\mu_r=f(B)$ za dinamo limove

B[Wb/m ²]	μ_r	B[Wb/m ²]	μ_r
0,1	900	0,7	3300
0,2	1700	0,8	3200
0,3	2300	0,9	3000
0,4	2800	1,0	2700
0,5	3100	1,1	2400
0,6	3200	1,2	2100

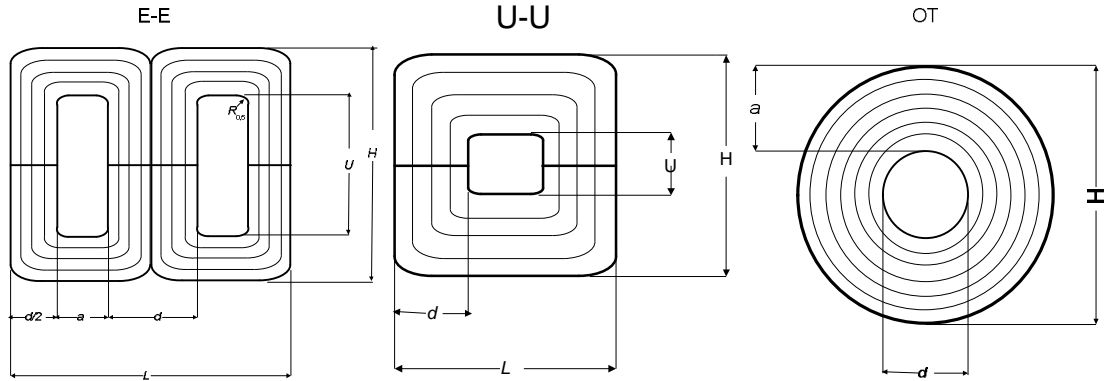
Tablica gubitaka u transformatorskim limovima

Vrsta lima	Indukcija B u Wb/m ²			
	0,8	1	1,2	1,5
a.-Za limove debljine 0,5mm				
Dinamo-lim I, 0,5% Si	2,10	3,60	5,30	8,60
Dinamo-lim II, 1% Si	1,85	3,00	4,50	7,40
Dinamo-lim III, 2% Si	1,42	2,30	3,45	5,60
Dinamo-lim IV, 4% Si	1,06	1,70	2,50	4,00
b.-Za limove debljine 0,35mm				
Dinamo-lim IV, 4% Si	0,84	1,30	1,96	3,25
Hiper 4, 4% Si	0,68	1,08	1,58	2,55
Tran-kor, 4% Si	0,52	0,80	1,16	1,86

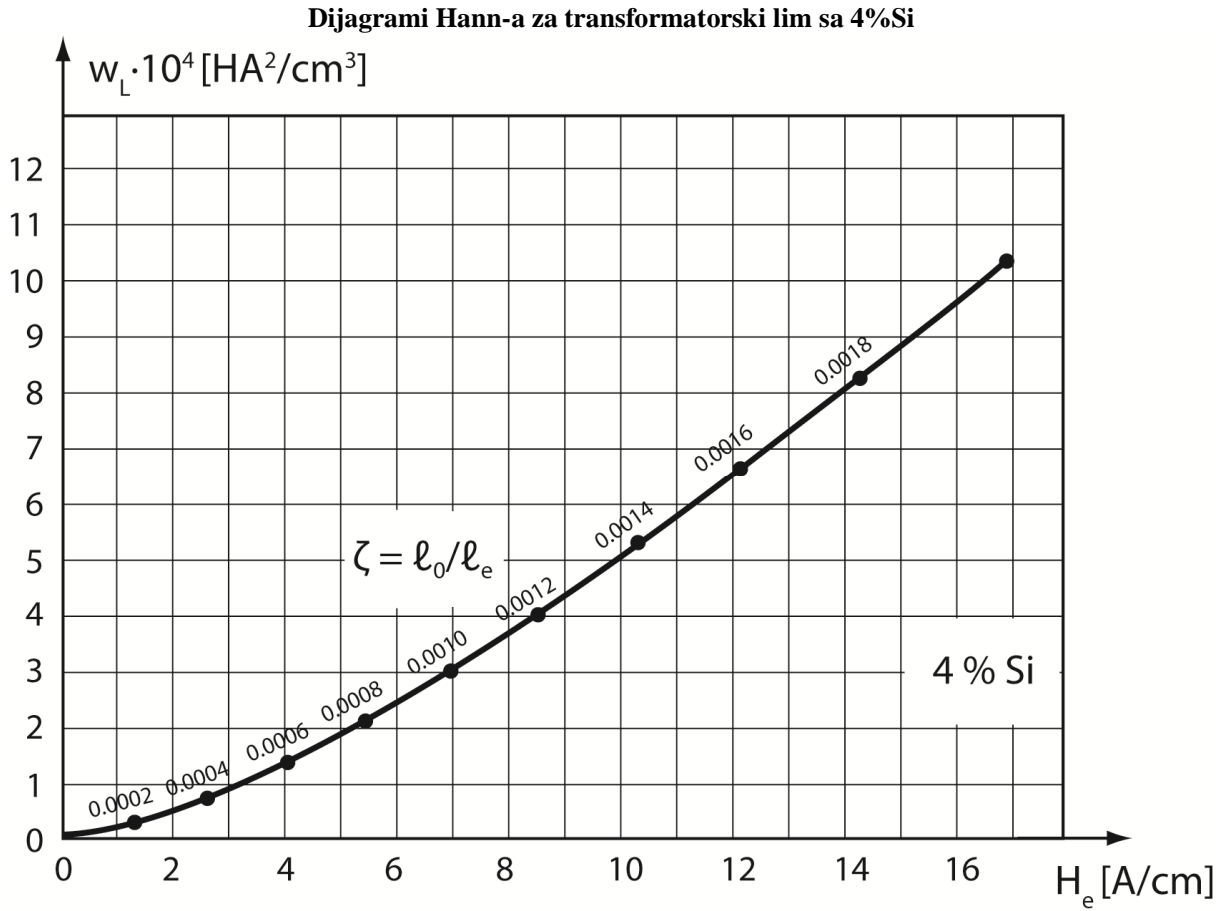
Veza prečnika žice i površinske gustine navojaka

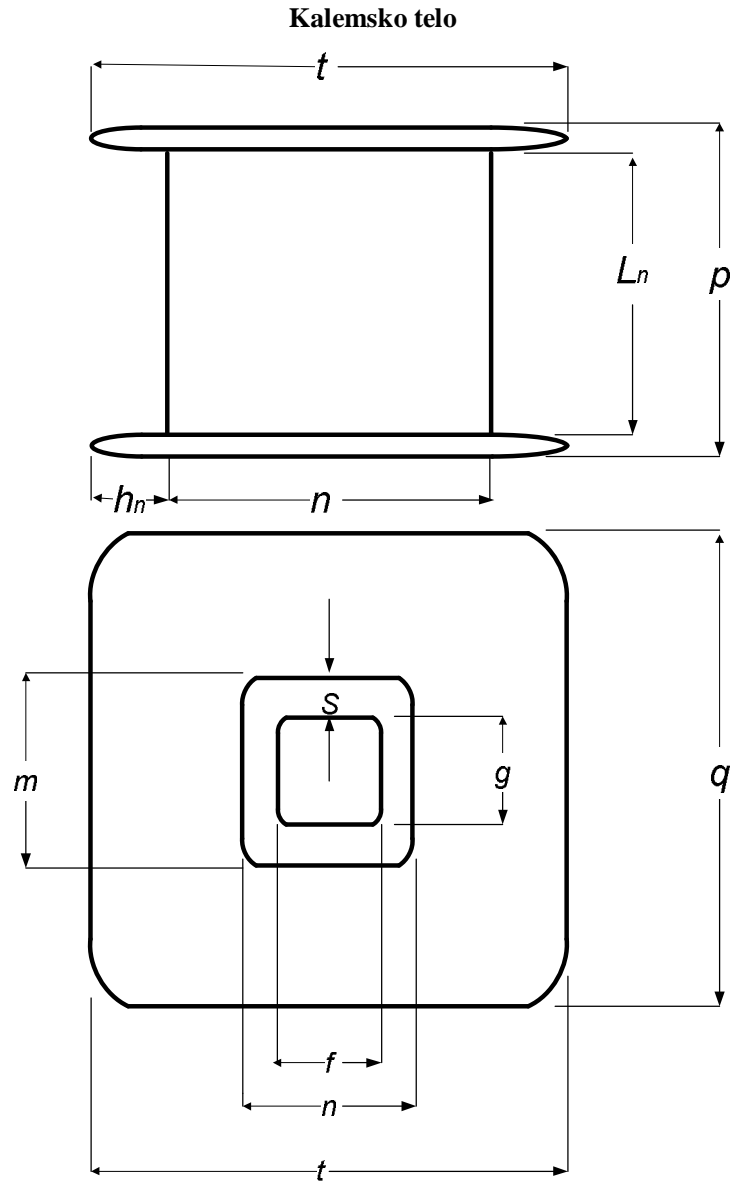
dž [mm]	Izolacija L	Izolacija L+S	[m/Ω]	[m/kg]
0,05	17000	11000	0,112	55600
0,06	13000	8400	0,159	48000
0,07	10000	6500	0,216	29000
0,08	8500	5200	0,282	22300
0,09	7200	4500	0,356	17600
0,1	5800	3600	0,441	14300
0,11	4800	3000	0,532	11770
0,12	4100	2700	0,633	9920
0,13	3500	2400	0,741	8480
0,14	3200	2100	0,883	7300
0,15	2700	1900	0,991	6370
0,18	1900	1400	1,42	4430
0,2	1550	1160	1,76	3570
0,22	1300	1000	2,13	2960
0,25	1000	840	2,75	2290
0,3	720	590	3,97	1590
0,35	520	450	5,33	1170
0,4	410	360	7,05	893
0,45	330	310	8,93	705
0,5	260	250	11	572
Prečnik žice	Površinska gustina zavojaka N0[zav/cm2]		Lž/R	Lž/G

Dimenzije trakastih rasklopnih jezgara E-E

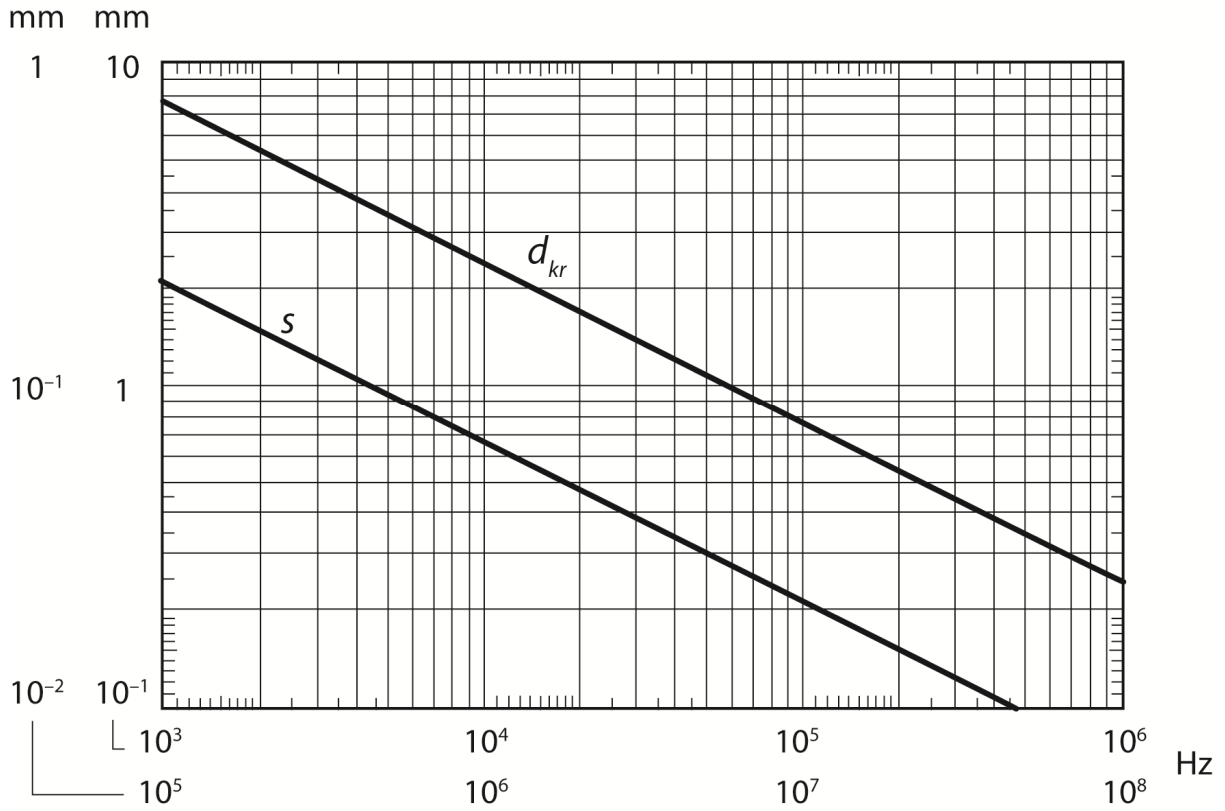


TIP	Dimenzije					b				Sef [cm ²]				l _e [cm]	Orijentac. snaga[VA] za 50Hz			
	d	c	a	l	H	I	II	III	IV	I	II	III	IV		I	II	III	IV
E-Edxb	10	25	10	40	35	10	12,5	16	20	0,87	1,09	1,39	1,74	8,5	-	-	-	-
	12	30	12	48	42	12,5	16	20	25	1,31	1,68	2,10	2,63	10,2	9	10	13	16
	16	40	16	64	56	16	20	23	32	2,24	2,80	5,60	4,50	13,6	20	25	33	43
	20	50	20	80	70	10	15	32	40	3,50	4,4	5,6	7,1	17,1	54	68	86	110
	25	62,5	25	100	87,5	25	32	40	30	5,5	7,1	8,8	11	21,3	155	170	210	260
	32	80	32	128	112	32	40	50	64	9,1	11,3	14,2	18,1	27,3	310	390	490	680
	40	100	40	160	140	40	50	64	80	14,2	17,7	22,7	28,4	34,2	690	850	1000	1200
U-Uxb,c	10	20	12,5	38,5	40	-	12,5	-	-	-	1,1	-	-	9,6	-	7,5	-	-
	12,5	30	20	45	55	-	25	-	-	-	2,76	-	-	13,8	-	28	-	-
	20	50	32	72	90	-	40	-	-	-	7,1	-	-	22,7	-	180	-	-
	32	80	50	114	144	-	64	-	-	-	18,2	-	-	36	-	1000	-	-
OTd/H	16	-	5	-	26	6,9	8	10	12,5	0,28	0,35	0,43	0,54	6,5	0,48	0,6	0,73	0,92
	25	-	7,5	-	40	10	12,5	16	20	0,66	0,82	1,05	1,3	10,2	2,9	3,7	4,7	5,8
	40	-	12	-	64	20	25	32	40	2,18	2,64	3,38	4,25	16,3	24	30	39	49,5
	80	-	24	-	128	40	50	64	80	8,5	10,7	13,7	17,1	32,6	540	428	518	685





Zavisnost parametara s i d_{kr} od frekvencije



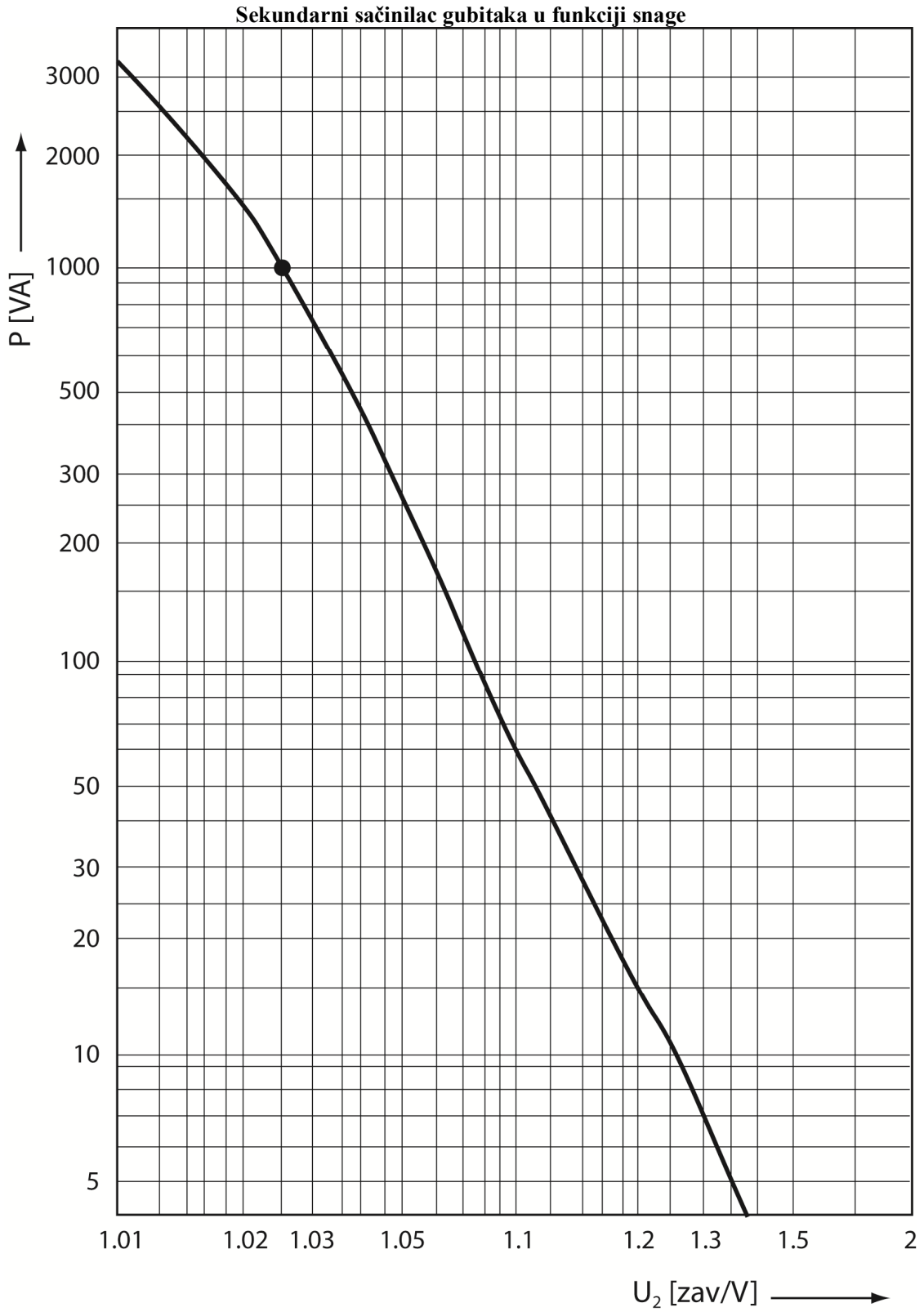
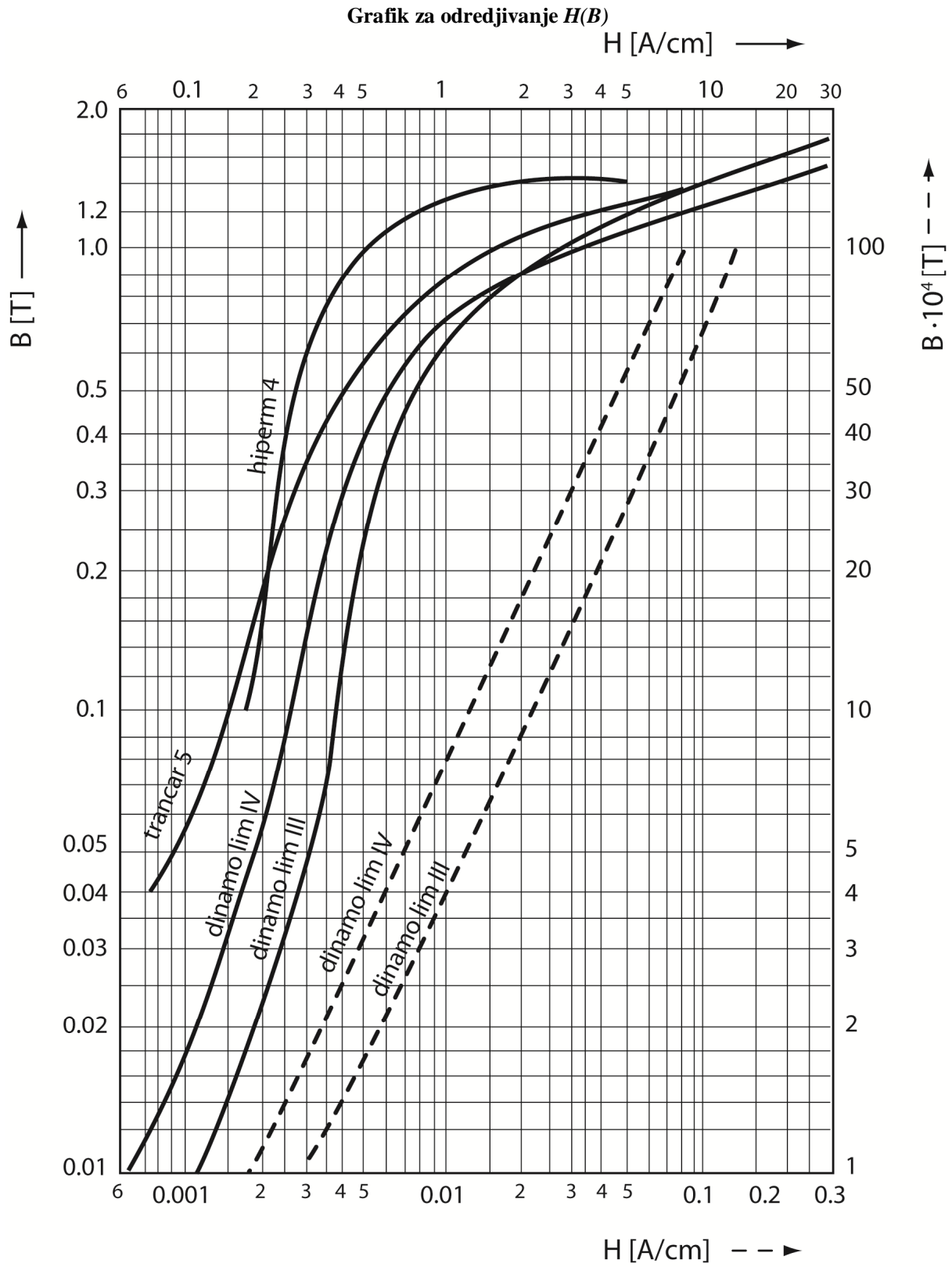
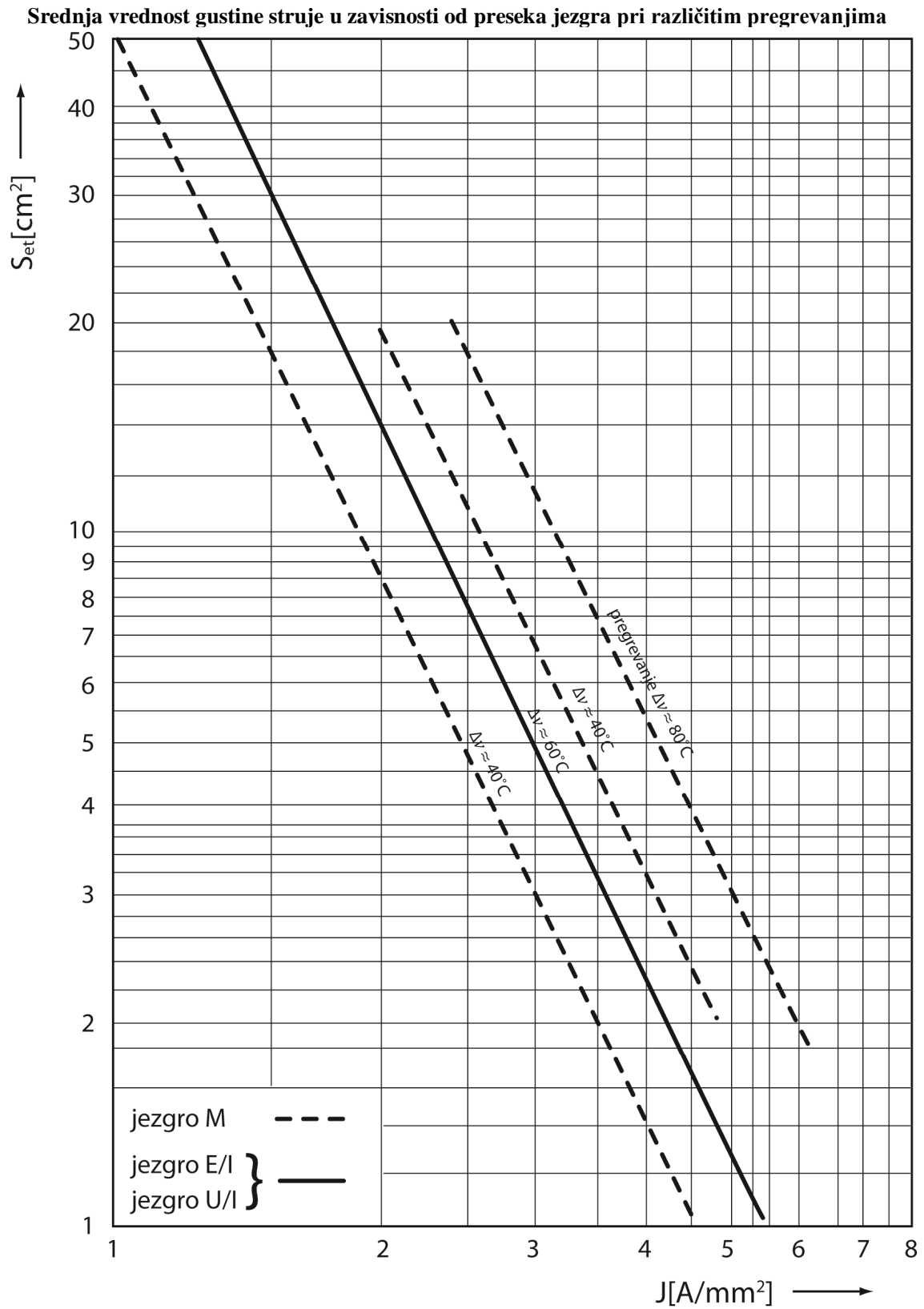


Tabela za određivanje maksimalne debljine limenih paketa

lima	Profil	Debljina paketa b[cm]	Širina paketa d[cm]	Presek paketa S[cm ²]	Približna snaga Pž [VA]
M					
42		1,5	1,2	1,80	3÷5
55		2,0	1,7	3,40	10÷15
65		2,7	2,0	5,40	25÷30
74		3,2	2,3	7,36	40÷50
85		3,5	2,9	10,15	70÷90
102		3,5	3,4	11,90	120÷130
102		5,2	3,4	17,68	180÷250
E/I					
42		1,4	1,4	1,96	3
48		1,6	1,6	2,56	5
54		1,8	1,8	3,24	10
60		2,0	2,0	4,00	15
66		2,2	2,2	4,84	20
78		2,6	2,6	6,76	35
84		2,8	2,8	7,84	50
92		3,5	2,5	8,75	60÷70
106		3,0	2,9	8,70	70÷100
106		4,5	2,9	13,05	140÷170
130		3,5	3,5	12,25	200÷250
150		4,0	4,0	16,00	250÷350
150		5,0	4,0	20,00	350÷430
150		6,0	4,0	24,00	500÷580
U/I					
39		1,3	1,3	1,69	12
39		2,0	1,3	2,60	25
48		1,6	1,6	2,56	25
48		2,5	1,6	4,00	70
60		2,0	2,0	4,00	70
60		3,0	2,0	6,00	150
75		2,5	2,5	6,25	150
75		4,0	2,5	10,00	400
90		5,0	3,0	15,00	900





Geometrijske oznake i debljina kalemskog tela u funkciji snage

$g=d+s$, $f=b+s$, $m=d+3s$, $n=b+3s$, $q=(2a+d)-2s$, $t=(2a+b)-2s$, $p=c-5s$ (M tip), $p=c-2s$ (E/I tip).

Pž [VA]	1+10	10+200	200+500	500+1000	1000+3000
s[cm]	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40

Vrednosti l_p/l i l/l_p po Wies-u i Ollendorf-u za kraće jednoslojne cilindrične kalemove

d_0/l	l_p/l	l/l_p	l/d_0
0,01	1,005	0,995	100
0,02	1,009	0,992	50
0,05	1,023	0,978	20
0,10	1,045	0,957	10
0,20	1,090	0,920	5
0,50	1,224	0,866	2
1,00	1,445	0,692	1
2,00	1,880	0,521	0,5
5,00	3,125	0,320	0,2
10,00	5,000	0,200	0,1
20,00	8,000	0,125	0,05
50,00	11,000	0,091	0,02

